1 Números reales

Presentación de la unidad

- El estudio de los números irracionales tiene interés teórico y es fundamental para la totalidad de los estudiantes. Otro tanto le ocurre a la recta real como ámbito numérico, que contiene la totalidad de los números que se utilizan.
- El manejo de los radicales, manualmente y con calculadora, es básico para el alumnado de este curso. No obstante, creemos que pueden darse distintos niveles de destreza según las aptitudes y la proyección académica de los distintos estudiantes.
- Los números reales, a pesar de su nombre, desempeñan un papel más teórico que práctico. En las aplicaciones de los números a la realidad, basta utilizar unas pocas cifras decimales.
- Además de las definiciones habituales, se relaciona el error (absoluto o relativo) con las cifras significativas que se utilizan. El estudio de la notación científica completa la visión del apartado anterior.
- Se ofrece un primer contacto con los logaritmos: su definición y algunas propiedades para comprender el uso que se hace de ellos y su presencia en las calculadoras.

Conocimientos mínimos

- Reconocimiento de números racionales e irracionales.
- Representación aproximada de un número cualquiera sobre la recta real.
- Manejo diestro de intervalos y semirrectas.
- Interpretación de radicales. Cálculo mental.
- Utilización de la forma exponencial de los radicales.
- Utilización de la calculadora para operar con potencias y raíces.
- Conocimiento de las propiedades de los radicales.
- Racionalización de denominadores en casos sencillos.
- Utilización razonable de los números aproximados en su expresión decimal. Truncamientos y redondeos. Relación del error cometido (absoluto o relativo) con las cifras significativas utilizadas.
- Escritura e interpretación de números en notación científica. Utilización de la calculadora para operarlos.
- Noción de logaritmo de un número. Obtención de un logaritmo a partir de la definición o con ayuda de la calculadora.

Esquema de la unidad

LOS NÚMEROS REALES

- pueden ser
  - RACIONALES: números que se pueden expresar en forma de fracción
    - que incluyen
      - los números ENTEROS
        - que incluyen
          - los números NATURALES
          - los números NEGATIVOS
      - los números FRACCIONARIOS
  - IRRACIONALES: números que no se pueden expresar en forma de fracción
    - como, por ejemplo
      - • El número áureo • El número π
      - los radicales $\sqrt{p}$ con p no cuadrado perfecto
- se representan en
  - la recta real
- se operan mediante
  - Sumas, restas, multiplicaciones, divisiones…
  - Radicación $a = \sqrt[n]{b}$
    - con propiedades
      - $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
      - $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
      - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
      - $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
      - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - Potenciación $a^n = b$
    - se utiliza para
      - la notación científica, $a,bc… \times 10^n$, que sirve para expresar números muy grandes ($5,84 \cdot 10^{15}$) o muy pequeños ($3,9 \cdot 10^{-12}$)
  - Logaritmos $\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$
    - con propiedades
      - $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
      - $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$
      - $\log_a P^k = k \log_a P$
      - $\log_b P = \frac{\log_a P}{\log_a b}$

Complementos importantes

- Obtención de una cota del error absoluto o del error relativo de un número aproximado.
- Operaciones con números en notación científica.
- Representación de radicales sobre la recta real mediante métodos geométricos.
- Utilización de la calculadora en el modo científico SCI.
- Justificación de la irracionalidad de $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$
- Comprensión de la irracionalidad de π y Φ.
- Justificación de las propiedades de los radicales.
- Manejo muy diestro de las operaciones con radicales, buscando la expresión resultante más adecuada para el fin que se persiga.
- Obtención de algunas propiedades de los logaritmos.

Anticipación de tareas

- Expresar decimales exactos o periódicos en forma de fracción.
- Recordar las potencias de exponente entero.
- Repasar las operaciones con potencias de exponente entero y su utilización para simplificar expresiones con potencias.
- Calcular raíces exactas aplicando la definición de raíz enésima.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 1 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido. Lo mismo cabe decir de la autoevaluación.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 13. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 11. Actividad 2 (*)	Pág. 11. Organización de los distintos tipos de números
Pág. 15. Piensa y practica	Pág. 13. Piensa y practica	Pág. 12. Actividad 1 (*)
Pág. 17. Piensa y practica	Pág. 17. Ejercicios resueltos	Pág. 23. Actividad 1 (*)
Pág. 18. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Págs. 22 y 23. Ejercicios resueltos	Pág. 27. Actividad sugerida en esta P.D.
Pág. 20. Piensa y practica	Pág. 25. Comprobación (Ladillo) (*)	
Pág. 21. Piensa y practica	Pág. 26. Ejercicios resueltos	
Pág. 26. Piensa y practica	Pág. 27. Ejercicios y problemas resueltos (*)	
Págs. 28 y 29. Actividades 1 a 29		
Pág. 30. Actividades 40 a 50		
Pág. 31. Actividades 51 a 57 (*)		

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 10. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 10. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 10. Actividad sugerida en esta P.D.	Todos los problemas propuestos en el libro del alumnado están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
Pág. 32. Aprende, prueba, investiga… (*)	Pág. 32. Infórmate. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 13. Actividad 4 (*)	Pág. 31. Actividades 51 a 57 (*)
		Pág. 26. Actividad 5 (*)	Pág. 33. Entrénate resolviendo problemas (*)
		Pág. 32. Aprende, prueba, investiga… (*)	
		Pág. 32. Calcula y deduce (*)	

1 Números reales

Números racionales

Los *números naturales* han sido utilizados por todas las civilizaciones desde la más remota antigüedad.

El papel de los negativos, y, sobre todo, del cero, resultó más difícil de concebir. Por ello, los *números enteros* no acabaron de tomar forma hasta finales del siglo VII, en la India. De allí nos llegaron por medio de los árabes en el siglo IX, junto con el sistema de numeración decimal-posicional.

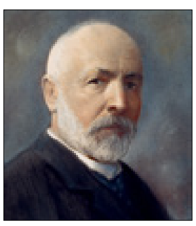
Las *fracciones* se empezaron a utilizar desde muy antiguo, pero su uso al estilo actual se acabó de consolidar hacia el siglo XIV.

Antiguo observatorio astronómico en Ujjain (India). En esta ciudad vivió Brahmagupta (598-670), matemático y astrónomo indio que sistematizó por primera vez el cálculo con números negativos y el cero.

Los irracionales

Los números *irracionales* fueron descubiertos por los pitagóricos aproximadamente en el siglo V antes de nuestra era. Sin embargo, más que como números fueron tomados como magnitudes geométricas. Esta forma de tratarlos se extendió durante casi dos milenios.

"Las Siete Artes Liberales", Giovanni da Ponte. La segunda pareja empezando por la derecha representa a la Aritmética, portando una tabla de cálculo, junto con Pitágoras.



El conjunto de los números reales

Es muy reciente, pues, la idea de que todos estos números forman parte de un único conjunto con estructura y características muy interesantes. El concepto de *número real*, como ahora lo manejamos, se fue concibiendo y construyendo al evolucionar el estudio de las funciones. Su formalización definitiva se debe al alemán **Cantor** (1871).

Georg Cantor (1845-1918), matemático alemán considerado el padre de la teoría de conjuntos.

10

Organización de los distintos tipos de números

Los conjuntos de números que conocemos y manejamos están bien estructurados:

- Los naturales, $\mathbb{N}$.
- Si a estos les añadimos sus opuestos (negativos), obtenemos el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$.
- Si a los enteros les añadimos los fraccionarios, obtenemos los racionales, $\mathbb{Q}$.
- Si a los racionales les añadimos los no racionales, ¿conseguiremos un conjunto bien estructurado?

- RACIONALES $\mathbb{Q}$
  - ENTEROS $\mathbb{Z}$
    - NATURALES $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $0,\ 7,\ 15,\ \frac{33}{11},\ \sqrt[3]{32},\ \dots$
    - ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow$ $-13,\ -48,\ -\frac{24}{6},\ \sqrt[3]{-27},\ \dots$
  - FRACCIONARIOS (racionales no enteros) $\rightarrow$ $8{,}92;\ -15{,}8\widehat{63};\ \frac{7}{11};\ -\frac{87}{5};\ \dots$
- NO RACIONALES $\rightarrow$ $\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ -\sqrt{8},\ \sqrt[3]{4},\ \dots$

El número π en la antigüedad

El número π es irracional. Pero a lo largo de la historia se le han atribuido distintos valores racionales. Algunos de ellos son:

Antiguos egipcios (aprox. siglo XX a. C.) $\longrightarrow$ 3,16

Antiguos babilonios (aprox. siglo XX a. C.) $\longrightarrow$ 25/8

Arquímedes (siglo III a. C.) $\longrightarrow$ 22/7

Tolomeo (siglo II) $\longrightarrow$ 377/120

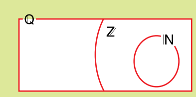
Liu Hiu (siglo V) $\longrightarrow$ 355/113

Resuelve

1. a) Escribe tres números naturales y tres números enteros que no sean naturales.

b) Escribe tres números racionales que no sean enteros y tres números que no sean racionales.

c) Sitúa, en tu cuaderno, los números anteriores en un esquema como el de la derecha.



2. Sabiendo que el verdadero valor de π es 3,14159265359… da una cota del error cometido en cada una de las aproximaciones anteriores.

Por ejemplo: $\frac{377}{120} = \left.\begin{array}{l} 3{,}141\boxed{6}66\dots \\ 3{,}141\boxed{5}92\dots \end{array}\right\}$ El error es menor que 1 diezmilésima: error < 0,0001

11

Al iniciar la unidad

- El concepto de número real, con el consiguiente "conjunto de números reales", es una abstracción moderna y profunda. El camino para llegar a ella ha sido muy largo.

Cuestiones para detectar ideas previas

- En las actividades del apartado "Resuelve", se pretende que los estudiantes traten de clasificar los distintos tipos de números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) para afianzar lo que ya saben sobre conjuntos numéricos. Además, la idea de aproximación y error puede trabajarse en un contexto histórico a partir de las estimaciones que se han hecho de π en algunos momentos de la historia.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Los estudiantes deben diseñar un logo partiendo de un cuadrado de lado 10 cm utilizando arcos de circunferencia y triángulos rectángulos. En él deben calcular la longitud de cada una de las líneas rectas o curvas que han utilizado.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

Relacionar la aparición y evolución de los conjuntos numéricos con las necesidades que surgen del desarrollo cultural, científico, tecnológico, etc., a lo largo de la historia.

TIC

Se sugiere la siguiente actividad:

Recopilar y ampliar la información sobre la evolución histórica de los conjuntos numéricos. Confeccionar murales, realizar informes escritos, etc.

Soluciones de "Resuelve"

1 a) Por ejemplo:

Naturales: 2, 3, 4.

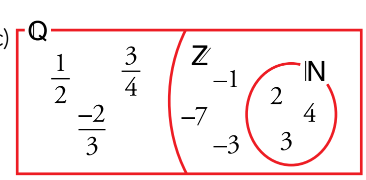
Enteros no naturales: –1, –7, –3.

b) Por ejemplo:

Racionales no enteros: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$

No racionales: π; $\sqrt{2}$; 0,1010010001…

c)



2 Antiguos egipcios: Error < 0,2

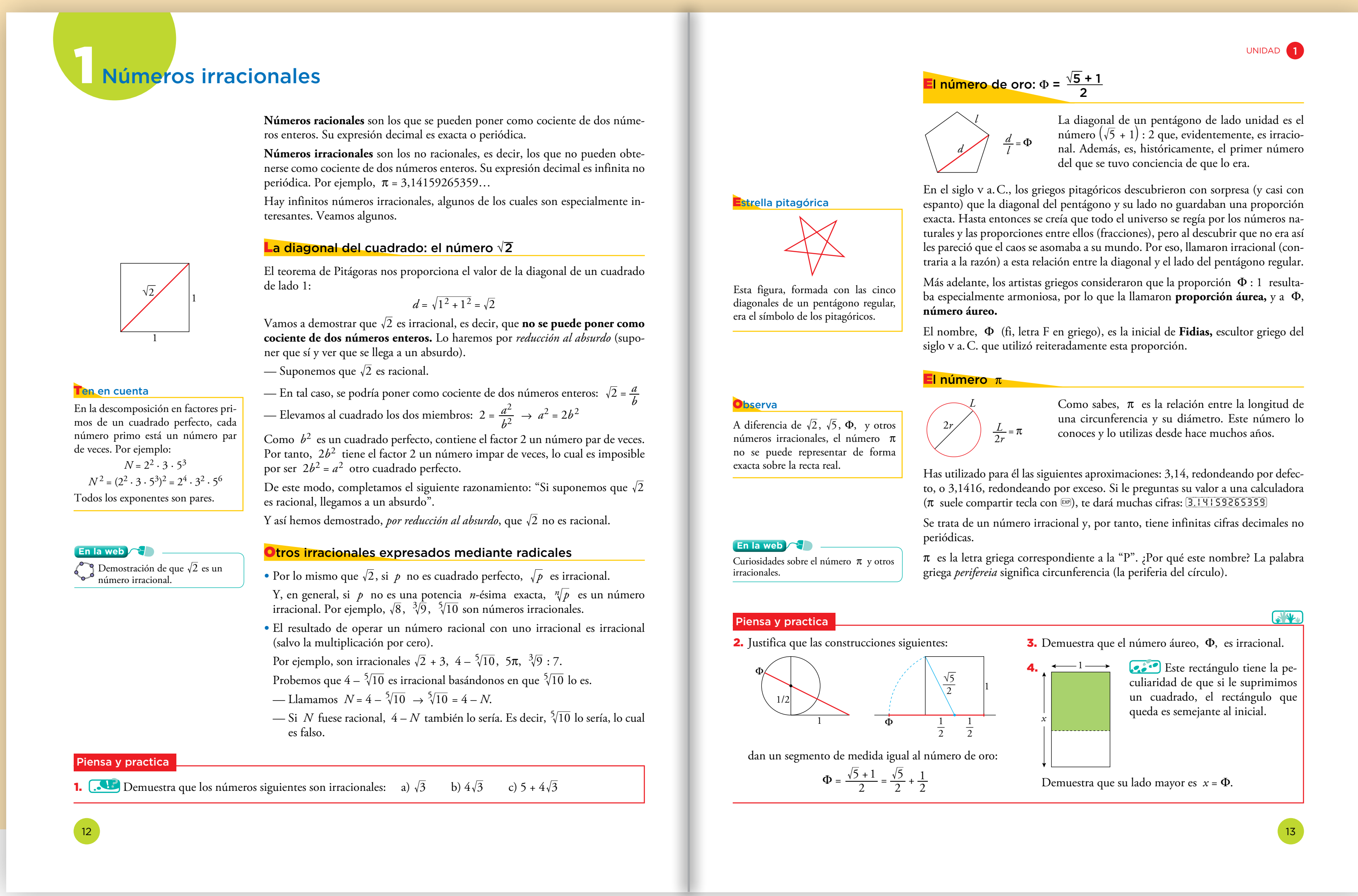
Antiguos babilonios: Error < 0,02

Arquímedes: Error < 0,001

Tolomeo: Error < 0,0001

Liu Hiu: Error < 0,0000003

ANOTACIONES



1 Números irracionales

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos algunos.

La diagonal del cuadrado: el número $\sqrt{2}$

El teorema de Pitágoras nos proporciona el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Vamos a demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional, es decir, que **no se puede poner como cociente de dos números enteros.** Lo haremos por *reducción al absurdo* (suponer que sí y ver que se llega a un absurdo).

— Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional.

— En tal caso, se podría poner como cociente de dos números enteros: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

— Elevamos al cuadrado los dos miembros: $2 = \frac{a^2}{b^2} \to a^2 = 2b^2$

Como b^2 es un cuadrado perfecto, contiene el factor 2 un número par de veces. Por tanto, $2b^2$ tiene el factor 2 un número impar de veces, lo cual es imposible por ser $2b^2 = a^2$ otro cuadrado perfecto.

De este modo, completamos el siguiente razonamiento: "Si suponemos que $\sqrt{2}$ es racional, llegamos a un absurdo".

Y así hemos demostrado, *por reducción al absurdo*, que $\sqrt{2}$ no es racional.

Ten en cuenta

En la descomposición en factores primos de un cuadrado perfecto, cada número primo está un número par de veces. Por ejemplo:

$$N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$
$$N^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5^3)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6$$

Todos los exponentes son pares.

En la web

Demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Otros irracionales expresados mediante radicales

- Por lo mismo que $\sqrt{2}$, si p no es cuadrado perfecto, $\sqrt{p}$ es irracional.

  Y, en general, si p no es una potencia n-ésima exacta, $\sqrt[n]{p}$ es un número irracional. Por ejemplo, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{10}$ son números irracionales.

- El resultado de operar un número racional con uno irracional es irracional (salvo la multiplicación por cero).

  Por ejemplo, son irracionales $\sqrt{2} + 3$, $4 - \sqrt[5]{10}$, 5π, $\sqrt[3]{9} : 7$.

  Probemos que $4 - \sqrt[5]{10}$ es irracional basándonos en que $\sqrt[5]{10}$ lo es.

  — Llamamos $N = 4 - \sqrt[5]{10} \to \sqrt[5]{10} = 4 - N$.

  — Si N fuese racional, $4 - N$ también lo sería. Es decir, $\sqrt[5]{10}$ lo sería, lo cual es falso.

Piensa y practica

1. Demuestra que los números siguientes son irracionales: a) $\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $5 + 4\sqrt{3}$

12

UNIDAD 1

El número de oro: $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

$\frac{d}{l} = \Phi$

La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $(\sqrt{5} + 1) : 2$ que, evidentemente, es irracional. Además, es, históricamente, el primer número del que se tuvo conciencia de que lo era.

En el siglo v a.C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las proporciones entre ellos (fracciones), pero al descubrir que no era así les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron irracional (contraria a la razón) a esta relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular.

Más adelante, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **proporción áurea,** y a Φ, **número áureo.**

El nombre, Φ (fi, letra F en griego), es la inicial de **Fidias,** escultor griego del siglo v a.C. que utilizó reiteradamente esta proporción.

Estrella pitagórica

Esta figura, formada con las cinco diagonales de un pentágono regular, era el símbolo de los pitagóricos.

El número π

$\frac{L}{2r} = \pi$

Como sabes, π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Este número lo conoces y lo utilizas desde hace muchos años.

Has utilizado para él las siguientes aproximaciones: 3,14, redondeando por defecto, o 3,1416, redondeando por exceso. Si le preguntas su valor a una calculadora (π suele compartir tecla con EXP), te dará muchas cifras: 3.14159265359

Se trata de un número irracional y, por tanto, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

π es la letra griega correspondiente a la "P". ¿Por qué este nombre? La palabra griega *perifereia* significa circunferencia (la periferia del círculo).

Observa

A diferencia de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, Φ, y otros números irracionales, el número π no se puede representar de forma exacta sobre la recta real.

En la web

Curiosidades sobre el número π y otros irracionales.

Piensa y practica

2. Justifica que las construcciones siguientes:

   dan un segmento de medida igual al número de oro:

   $$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

3. Demuestra que el número áureo, Φ, es irracional.

4. Este rectángulo tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al inicial.

   Demuestra que su lado mayor es $x = \Phi$.

13

Sugerencias

- En este epígrafe presentamos los números irracionales como aquellos que no pueden expresarse como fracción.
- Planteamos aquí la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional usando el método de reducción al absurdo; es el docente quien debe decidir sobre la conveniencia o no de explicar este método. No obstante, sí convendría insistir en que un número decimal con infinitas cifras no periódicas es irracional, aun en el caso de que su expresión decimal presente ciertas regularidades, como es el caso de 7,1010010001… o 7,01234567891011…
- También debe insistirse en el reconocimiento de números irracionales cuando nos encontramos con raíces. Por ejemplo, saber a simple vista que $\sqrt[5]{32}$ es racional y $\sqrt[4]{8}$ es irracional.
- El número áureo, como primer número no racional conocido, y el número π, que los estudiantes utilizan con frecuencia, son especialmente motivadores para proponer pequeños trabajos de investigación a los alumnos y las alumnas. Las referencias y recursos en Internet sobre ambos son muy numerosos.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 12.

  Ampliación: Ejercicio 3 de la pág. 12. Ejercicios 4 y 5 de la pág. 13.

Aprendizaje cooperativo

Las actividades del "Piensa y practica" de estas páginas, y de todas aquellas en las que se pretende reforzar los conocimientos recién adquiridos, pueden realizarse solidariamente, en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales.

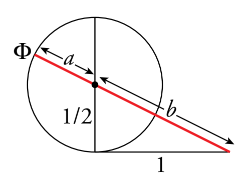
Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) Si $\sqrt{3}$ es racional, $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \to 3 = \frac{a^2}{b^2} \to 3b^2 = a^2$

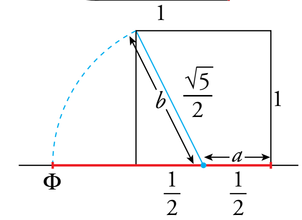
Contradicción. $3b^2$ contiene el factor 3 un número impar de veces, lo que contradice el que a^2 lo contiene un número par de veces.

b) y c) Son el resultado de operar racionales con un irracional y, por tanto, son número irracionales.

2



$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$



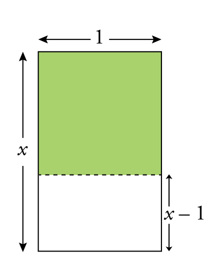
$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3 Sabemos que $\sqrt{5}$ es irracional (por lo mismo que $\sqrt{2}$). Observa que:

Si $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, entonces: $2\Phi = \sqrt{5} + 1 \to \sqrt{5} = 2\Phi - 1$

Si Φ fuese racional, entonces $\sqrt{5} = 2\Phi - 1$ sería racional. Contradicción.

4



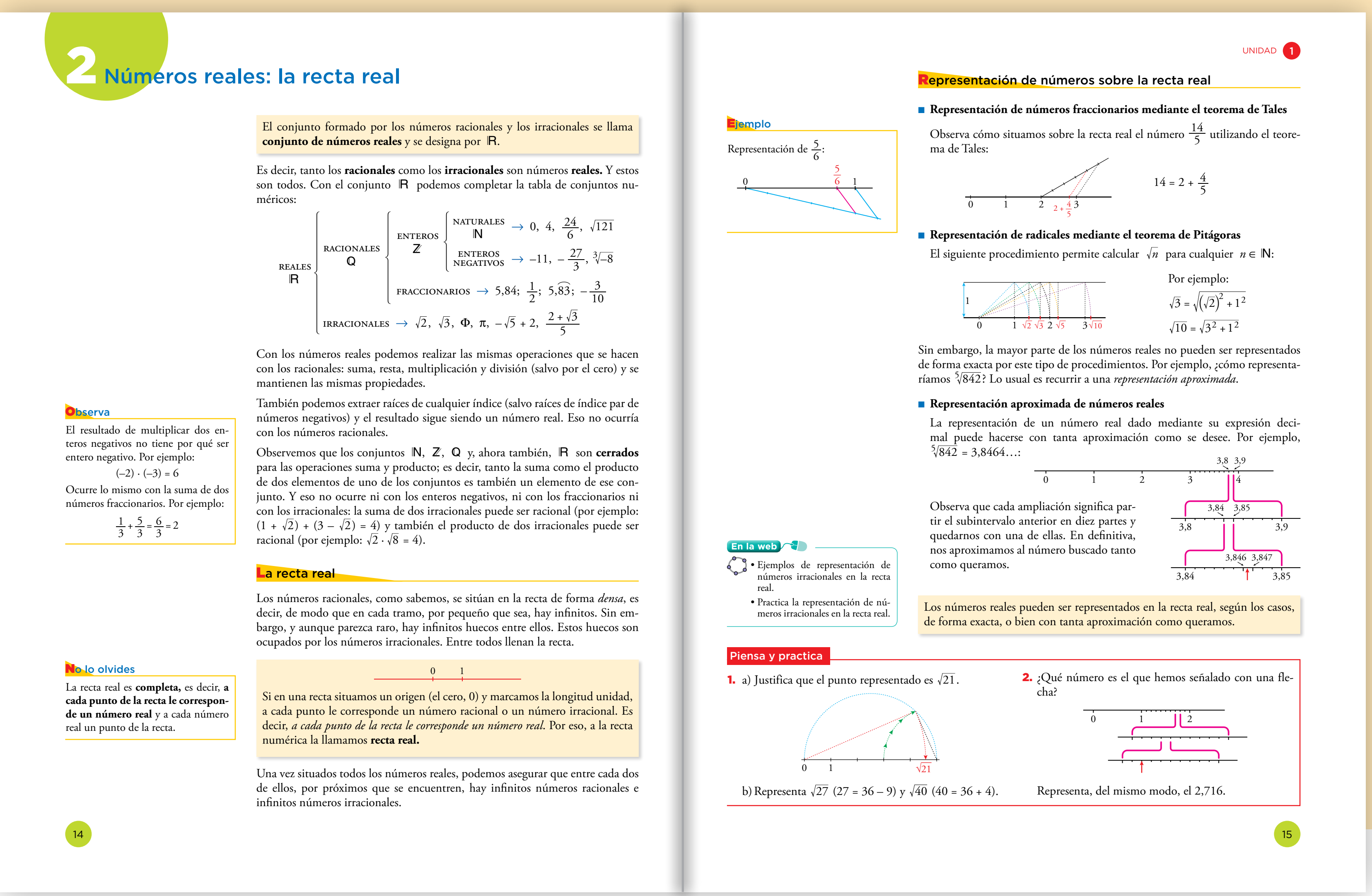
Del esquema obtenemos la proporción:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}$$

De donde obtenemos la ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cuya única solución positiva es Φ.



2 Números reales: la recta real

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por $\mathbb{R}$.

Es decir, tanto los **racionales** como los **irracionales** son números **reales.** Y estos son todos. Con el conjunto $\mathbb{R}$ podemos completar la tabla de conjuntos numéricos:

REALES $\mathbb{R}$
- RACIONALES $\mathbb{Q}$
  - ENTEROS $\mathbb{Z}$
    - NATURALES $\mathbb{N}$ → $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
    - ENTEROS NEGATIVOS → $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-8}$
  - FRACCIONARIOS → $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}\widehat{83};\ -\frac{3}{10}$
- IRRACIONALES → $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que se hacen con los racionales: suma, resta, multiplicación y división (salvo por el cero) y se mantienen las mismas propiedades.

También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

Observemos que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y, ahora también, $\mathbb{R}$ son **cerrados** para las operaciones suma y producto; es decir, tanto la suma como el producto de dos elementos de uno de los conjuntos es también un elemento de ese conjunto. Y eso no ocurre ni con los enteros negativos, ni con los fraccionarios ni con los irracionales: la suma de dos irracionales puede ser racional (por ejemplo: $(1+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4$) y también el producto de dos irracionales puede ser racional (por ejemplo: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$).

Observa

El resultado de multiplicar dos enteros negativos no tiene por qué ser entero negativo. Por ejemplo:

$$(-2)\cdot(-3)=6$$

Ocurre lo mismo con la suma de dos números fraccionarios. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2$$

La recta real

Los números racionales, como sabemos, se sitúan en la recta de forma *densa*, es decir, de modo que en cada tramo, por pequeño que sea, hay infinitos. Sin embargo, y aunque parezca raro, hay infinitos huecos entre ellos. Estos huecos son ocupados por los números irracionales. Entre todos llenan la recta.

0 1

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, *a cada punto de la recta le corresponde un número real.* Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real.**

Una vez situados todos los números reales, podemos asegurar que entre cada dos de ellos, por próximos que se encuentren, hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales.

No lo olvides

La recta real es **completa,** es decir, **a cada punto de la recta le corresponde un número real** y a cada número real un punto de la recta.

14

UNIDAD 1

Representación de números sobre la recta real

Ejemplo

Representación de $\frac{5}{6}$:

0 $\frac{5}{6}$ 1

- **Representación de números fraccionarios mediante el teorema de Tales**

Observa cómo situamos sobre la recta real el número $\frac{14}{5}$ utilizando el teorema de Tales:

0 1 2 $2+\frac{4}{5}$ 3

$$14 = 2 + \frac{4}{5}$$

- **Representación de radicales mediante el teorema de Pitágoras**

El siguiente procedimiento permite calcular $\sqrt{n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

1 0 1 $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ 2 $\sqrt{5}$ 3 $\sqrt{10}$

Por ejemplo:

$$\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}$$

$$\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$$

Sin embargo, la mayor parte de los números reales no pueden ser representados de forma exacta por este tipo de procedimientos. Por ejemplo, ¿cómo representaríamos $\sqrt[5]{842}$? Lo usual es recurrir a una *representación aproximada.*

- **Representación aproximada de números reales**

La representación de un número real dado mediante su expresión decimal puede hacerse con tanta aproximación como se desee. Por ejemplo, $\sqrt[5]{842}=3{,}8464\ldots$:

3,8 3,9 0 1 2 3 4
3,84 3,85 3,8 3,9
3,846 3,847 3,84 3,85

Observa que cada ampliación significa partir el subintervalo anterior en diez partes y quedarnos con una de ellas. En definitiva, nos aproximamos al número buscado tanto como queramos.

Los números reales pueden ser representados en la recta real, según los casos, de forma exacta, o bien con tanta aproximación como queramos.

En la web

- Ejemplos de representación de números irracionales en la recta real.
- Practica la representación de números irracionales en la recta real.

Piensa y practica

1. a) Justifica que el punto representado es $\sqrt{21}$.

0 1 $\sqrt{21}$

b) Representa $\sqrt{27}$ $(27 = 36 - 9)$ y $\sqrt{40}$ $(40 = 36 + 4)$.

2. ¿Qué número es el que hemos señalado con una flecha?

0 1 2

Representa, del mismo modo, el 2,716.

15

Sugerencias

- Se define por primera vez el conjunto de los números reales, y se hace como la unión de dos conjuntos conocidos ya por los estudiantes: los racionales y los irracionales. A este respecto, sería conveniente enfatizar en la propiedad de densidad que ambos conjuntos poseen.
- Al explicar la representación de $\sqrt{n}$, con n entero, merece la pena insistir en dos aspectos:
  — La necesidad de tener representado $\sqrt{n-1}$.
  — $\sqrt{n}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son 1 y $\sqrt{n-1}$.
- Como ilustración de este proceso, el docente puede terminar la explicación del epígrafe hablando de la espiral pitagórica: qué es y cómo se obtiene por medio de representaciones consecutivas de $\sqrt{n}$.
- En general, los números decimales (exactos, periódicos o irracionales) se sitúan en la recta real de forma aproximada. Sin embargo, creemos conveniente enseñar a los estudiantes en qué casos la representación en la recta real de números decimales se puede hacer de manera exacta:
  — Si el número decimal es exacto o periódico, se pasa a forma de fracción y se representa.
  — Si el número decimal es radical cuadrático, se representa como se ha visto en el punto anterior.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 6 de la pág. 13. Ejercicio 1 de la pág. 14. Ejercicio 2 de la pág. 15.

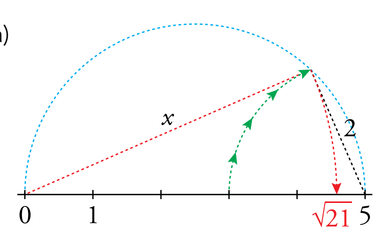
  Ampliación: Ejercicio 7 de la pág. 14. Ejercicios 3, 4, 5 y 6 de la pág. 15.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicio 3 de Practica, ficha A. Ejercicio 2 de Practica, ficha B.

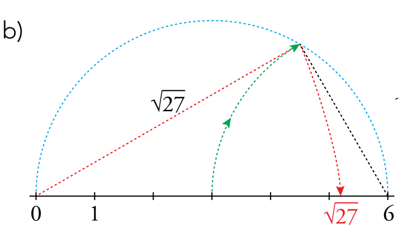
Soluciones de "Piensa y practica"

1 a)

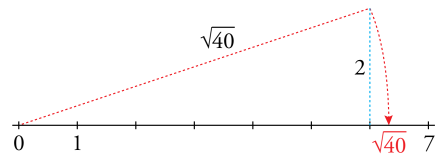


Aplicando Pitágoras: $5^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow x = \sqrt{21}$

b)

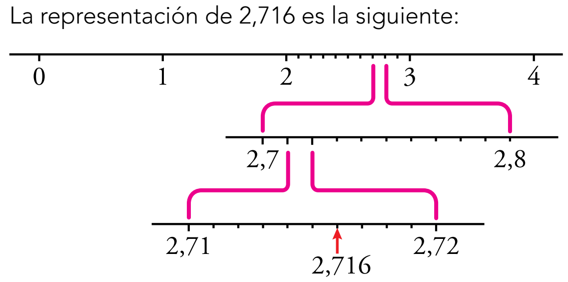


$\sqrt{27} = \sqrt{6^2 - 3^2}$



2 El número señalado con una flecha es el 1,732.

La representación de 2,716 es la siguiente:



3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

En el mundo científico, con frecuencia es necesario precisar el ámbito de validez de una cierta variable. Por ejemplo, "el periodo de tiempo comprendido entre 3 s y 11 s". Para ello, hemos de aprender a designar algunos tramos de la recta real con una nomenclatura adecuada.

Intervalo abierto

$(a, b) = \{x / \ a < x < b\}$

La expresión anterior se lee así:

CONJUNTO DE { x / a < x < b }: números x | tales que | son mayores que a | y menores que b

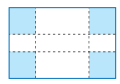
Intervalo abierto

El **intervalo abierto** (a, b) es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b: $\{x / \ a < x < b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo (–2, 1) está formado por los números reales comprendidos entre –2 y 1, sin incluir ni –2 ni 1: $\{x / \ -2 < x < 1\}$.

Otro ejemplo: para construir una caja con una cartulina de 10 cm × 15 cm, hemos de cortar de sus esquinas cuatro cuadrados iguales y, después, plegar. El lado de los cuadrados debe ser, pues, menor que 5 cm → (0, 5).



Intervalo cerrado

$[a, b] = \{x / \ a \le x \le b\}$

Intervalo cerrado

El **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, ambos incluidos: $\{x / \ a \le x \le b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo [–2, 1] está formado por los números reales comprendidos entre –2 y 1, incluyendo el –2 y el 1: $\{x / \ -2 \le x \le 1\}$.

Otro ejemplo: solo admitimos paquetes que pesen 2 kg o más, pero que no superen los 5 kg → [2, 5].

Intervalo semiabierto

$(a, b] = \{x / \ a < x \le b\}$

$[a, b) = \{x / \ a \le x < b\}$

Intervalo semiabierto

- El **intervalo** $(a, b]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo b pero no a: $\{x / \ a < x \le b\}$.

  Se representa así:

- El **intervalo** $[a, b)$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo a pero no b: $\{x / \ a \le x < b\}$.

  Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo (3, 4] está formado por los números reales comprendidos entre 3 y 4, incluyendo el 4 pero no el 3: $\{x / \ 3 < x \le 4\}$.

Otro ejemplo: en esta guardería se admiten niños que hayan cumplido 1 año pero que aún no tengan 4 años → [1, 4).

16

UNIDAD 1

Semirrectas

$(-\infty, a) = \{x / \ x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x / \ x \le a\}$

$(a, +\infty) = \{x / \ x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x / \ x \ge a\}$

Semirrectas y recta real

$(-\infty, a)$ son los números menores que a: $\{x / \ x < a\}$.
$(-\infty, a]$ son los números menores que a y el propio a: $\{x / \ x \le a\}$.
$(a, +\infty)$ son los números mayores que a: $\{x / \ x > a\}$.
$[a, +\infty)$ son los números mayores que a y el propio a: $\{x / \ x \ge a\}$.

- $(-\infty, 2)$ es el conjunto $\{x / \ x < 2\}$ →
- $[2, +\infty)$ es el conjunto $\{x / \ x \ge 2\}$ →
- Para votar, hay que tener 18 años cumplidos → $[18, +\infty)$. Naturalmente el $+\infty$, en este contexto real, hay que relativizarlo.

La propia recta real se representa en forma de intervalo así: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Ejercicios resueltos

1. ***Escribir en forma de intervalo y representar:***
a) $2 < x \le 3$ ***b)*** $x \le 1$ ***c)*** $x > 0$

a) Intervalo semiabierto (2, 3]
b) Semirrecta $(-\infty, 1]$
c) Semirrecta $(0, +\infty)$

2. ***Escribir en forma de desigualdad y representar:***
a) $[-2, 0]$ ***b)*** $[-1, +\infty)$ ***c)*** $(0, 1)$

a) $\{x / -2 \le x \le 0\}$
b) $\{x / x \ge -1\}$
c) $\{x / 0 < x < 1\}$

3. ***¿Para qué valores de x son válidas las expresiones siguientes?***
a) $\sqrt{x-3}$
b) $\sqrt{(x+2)(x-3)}$

a) $\sqrt{x-3}$ puede efectuarse siempre que x valga 3 o más: semirrecta $[3, +\infty)$.
b) La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es cero o positivo. Y esto ocurre cuando uno de los factores es cero, ambos son negativos o ambos son positivos. Es decir, si $x \le -2$ o si $x \ge 3$.
$(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

Piensa y practica

En la web Practica la representación de intervalos en la recta real.

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:
a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.
b) Mayores que 7.
c) Menores o iguales que –5.

2. Escribe en forma de intervalo y representa:
a) $\{x / \ 3 \le x < 5\}$ b) $\{x / \ x \ge 0\}$
c) $\{x / \ -3 < x < 1\}$ d) $\{x / \ x < 8\}$

3. Escribe en forma de desigualdad y representa:
a) (–1, 4] b) [0, 6] c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

17

Sugerencias

- Se introducen por primera vez los conceptos de intervalo y semirrecta. Es importante que los estudiantes vayan dominando esta nomenclatura, que utilizarán posteriormente para dar las soluciones de las inecuaciones y el dominio de definición de muchas funciones.
- Una buena forma de introducir este apartado es pedir a los estudiantes que reflexionen sobre los valores que puede tomar x para que $\sqrt{x}$ exista. Con esto se pretende que el alumnado, por un lado, deduzca que cualquier valor de $x \ge 0$ es válido, y por otro, que vea la necesidad de buscar una notación que incluya a todas las soluciones.
- Es conveniente realizar abundantes ejercicios en los que se pase de la simbología del intervalo y semirrecta a su significado y representación, y viceversa.
- Los ejercicios resueltos 1 y 2 de la página 17 pretenden ilustrar las distintas formas de expresar y representar un conjunto numérico. En el 3, se muestra una situación en la que es necesario el uso de intervalos y semirrectas.

Refuerzo y ampliación

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2 y 3 de la pág. 16.

  Ampliación: Ejercicio 4 de la pág. 16. Ejercicios 5, 6, 7 y 8 de la pág. 17.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 2 de Practica, ficha A. Ejercicio 3 de Practica, ficha B.

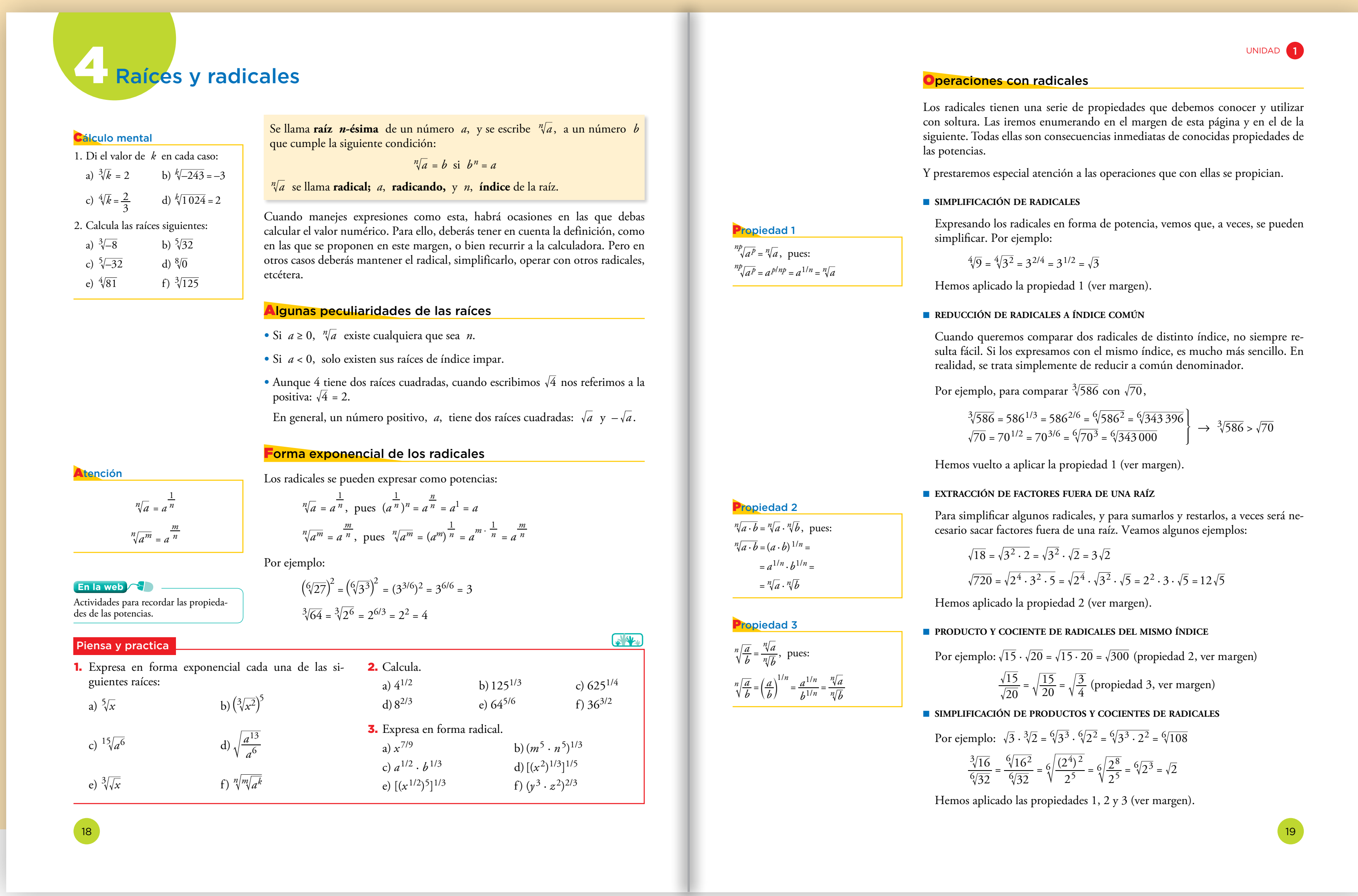
Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) [5, 6]
b) $(7, +\infty)$
c) $(-\infty, -5]$

2 a) [3, 5)
b) $[0, +\infty)$
c) (–3, –1)
d) $(-\infty, 8)$

3 a) $\{x / -1 < x \le 4\}$
b) $\{x / 0 \le x \le 6\}$
c) $\{x / x < -4\}$
c) $\{x / x \ge 9\}$

ANOTACIONES



4 Raíces y radicales

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical;** a, **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

Cuando manejes expresiones como esta, habrá ocasiones en las que debas calcular el valor numérico. Para ello, deberás tener en cuenta la definición, como en las que se proponen en este margen, o bien recurrir a la calculadora. Pero en otros casos deberás mantener el radical, simplificarlo, operar con otros radicales, etcétera.

Algunas peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, solo existen sus raíces de índice impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Atención

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Forma exponencial de los radicales

Los radicales se pueden expresar como potencias:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pues } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pues } \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt[6]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2 = (3^{3/6})^2 = 3^{6/6} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

En la web

Actividades para recordar las propiedades de las potencias.

Piensa y practica

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$

c) $\sqrt[15]{a^6}$ d) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ b) $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$

c) $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$ d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$

e) $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$ f) $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

18

UNIDAD 1

Operaciones con radicales

Los radicales tienen una serie de propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura. Las iremos enumerando en el margen de esta página y en el de la siguiente. Todas ellas son consecuencias inmediatas de conocidas propiedades de las potencias.

Y prestaremos especial atención a las operaciones que con ellas se propician.

Propiedad 1

$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, pues:

$\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Propiedad 2

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, pues:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} =$

$= a^{1/n} \cdot b^{1/n} =$

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Propiedad 3

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, pues:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

■ **SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES**

Expresando los radicales en forma de potencia, vemos que, a veces, se pueden simplificar. Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Hemos aplicado la propiedad 1 (ver margen).

■ **REDUCCIÓN DE RADICALES A ÍNDICE COMÚN**

Cuando queremos comparar dos radicales de distinto índice, no siempre resulta fácil. Si los expresamos con el mismo índice, es mucho más sencillo. En realidad, se trata simplemente de reducir a común denominador.

Por ejemplo, para comparar $\sqrt[3]{586}$ con $\sqrt{70}$,

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{586} = 586^{1/3} = 586^{2/6} = \sqrt[6]{586^2} = \sqrt[6]{343\,396} \\ \sqrt{70} = 70^{1/2} = 70^{3/6} = \sqrt[6]{70^3} = \sqrt[6]{343\,000} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[3]{586} > \sqrt{70}$$

Hemos vuelto a aplicar la propiedad 1 (ver margen).

■ **EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DE UNA RAÍZ**

Para simplificar algunos radicales, y para sumarlos y restarlos, a veces será necesario sacar factores fuera de una raíz. Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 2 (ver margen).

■ **PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO ÍNDICE**

Por ejemplo: $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300}$ (propiedad 2, ver margen)

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{15}{20}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ (propiedad 3, ver margen)}$$

■ **SIMPLIFICACIÓN DE PRODUCTOS Y COCIENTES DE RADICALES**

Por ejemplo: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{32}} = \frac{\sqrt[6]{16^2}}{\sqrt[6]{32}} = \sqrt[6]{\frac{(2^4)^2}{2^5}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Hemos aplicado las propiedades 1, 2 y 3 (ver margen).

19

Sugerencias

- En esta página se hace un somero repaso del concepto de raíz n-ésima asociado a la potencia n-ésima, así como de algunas propiedades de las raíces que los estudiantes ya conocen de cursos anteriores.
- Convendría prestar especial atención a conseguir que los estudiantes manejen la notación exponencial de los radicales en ambos sentidos (paso de raíz a potencia, y viceversa). Las actividades que hay al final de la página están propuestas para tal fin.

Aprendizaje cooperativo

Para las actividades destinadas al entrenamiento y mejora de la capacidad operativa, se sugiere abordar el trabajo en pequeños grupos. En un primer momento, los estudiantes realizarán las actividades individualmente. Después, contrastarán los resultados con los compañeros y las compañeras, resolviendo entre ellos las discrepancias. El profesor o la profesora resolverá los desacuerdos y los bloqueos.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 21.

  Ampliación: Ejercicio 2 de la pág. 20. Ejercicio 3 de la pág. 21.

Soluciones de "Cálculo mental"

1 a) $k = 8$ b) $k = 5$ c) $k = 16/81$ d) $k = 10$

2 a) –2 b) 2 c) –2 d) 0 e) 3 f) 5

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $x^{1/5}$ b) $x^{10/3}$ c) $a^{2/5}$

d) $a^{7/2}$ e) $x^{1/6}$ f) $a^{k/(m \cdot n)}$

2 a) 2 b) 5 c) 5

d) 4 e) 32 f) 216

3 a) $\sqrt[9]{x^7}$ b) $\sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

e) $\sqrt[6]{x^5}$ f) $\sqrt[3]{y^6 z^4}$

Sugerencias

- Se presentan en la página 19 las operaciones con radicales. En cada propiedad resaltamos su aspecto práctico, para qué se utiliza. De ahí el título que encabeza cada una y el ejemplo resuelto que muestra esa utilidad en la práctica.
- La expresión formal de las propiedades y su demostración está en los márgenes de esta página y de la siguiente.
- La raíz de un producto y de un cociente son propiedades que los estudiantes ya han manejado en el caso de raíces cuadradas; por tanto, convendrá hacer más hincapié en el resto.
- Es bueno que el alumnado reflexione sobre el proceso seguido en la demostración de las cinco primeras propiedades:
  1. Paso a forma exponencial de la raíz.
  2. Aplicación de las propiedades de las potencias.
  3. Paso a forma de raíz de las potencias obtenidas.

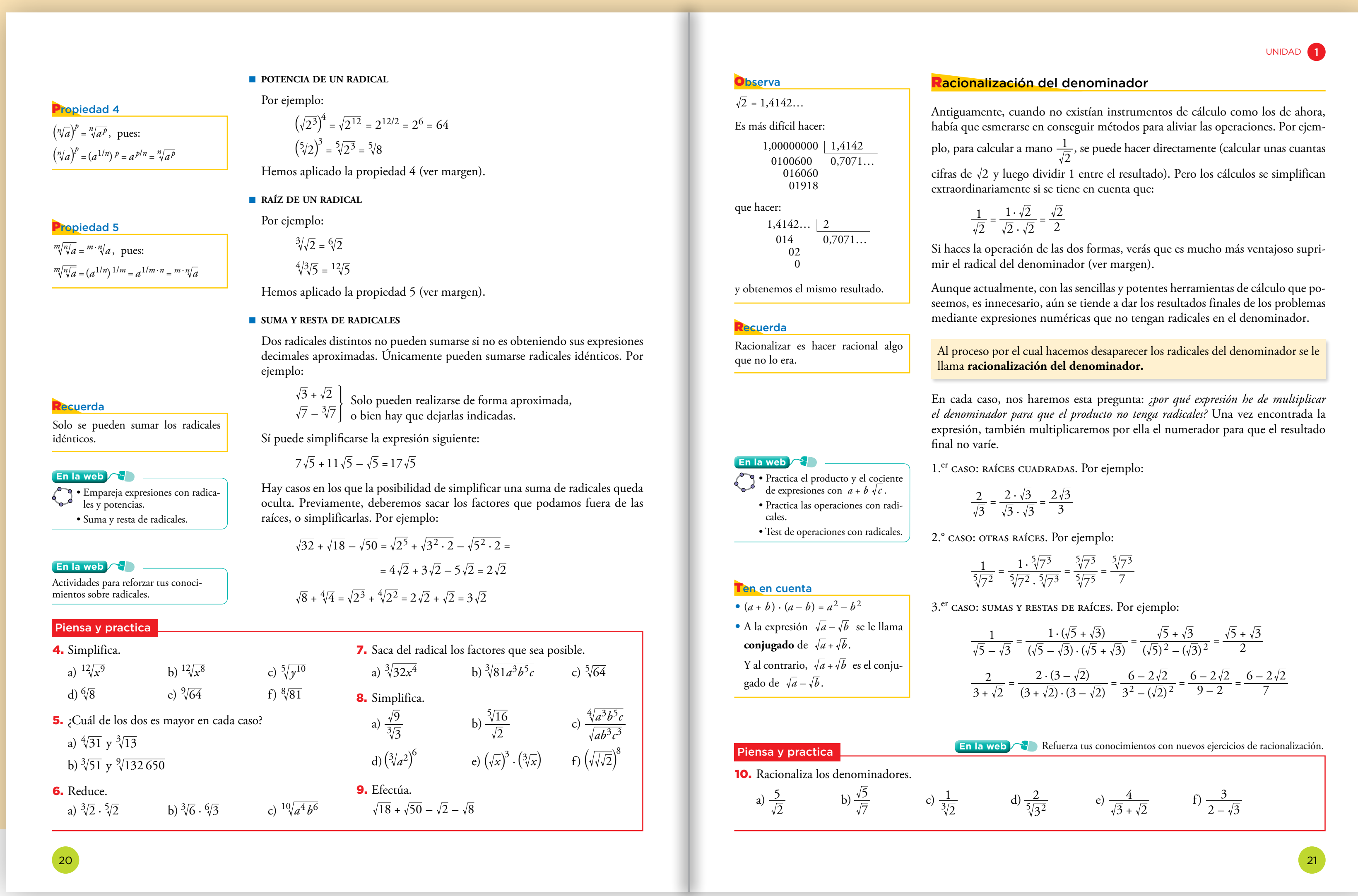
Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 22. Ejercicios 1 y 2, apartados desde el a) hasta el p), de la pág. 23. Ejercicio 1, apartados desde el a) hasta el f), de la pág. 25.

  Ampliación: Ejercicio 2, apartados desde el q) hasta el z), de la pág. 23. Ejercicio 1, apartados desde el h) hasta el j), de la pág. 25.



Propiedad 4

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, pues:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = (a^{1/n})^p = a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$

Propiedad 5

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, pues:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Recuerda

Solo se pueden sumar los radicales idénticos.

En la web

- Empareja expresiones con radicales y potencias.
- Suma y resta de radicales.

En la web

Actividades para reforzar tus conocimientos sobre radicales.

■ **POTENCIA DE UN RADICAL**

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6 = 64$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

Hemos aplicado la propiedad 4 (ver margen).

■ **RAÍZ DE UN RADICAL**

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

Hemos aplicado la propiedad 5 (ver margen).

■ **SUMA Y RESTA DE RADICALES**

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Únicamente pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{7} - \sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$$ Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.

Sí puede simplificarse la expresión siguiente:

$$7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$$

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales queda oculta. Previamente, deberemos sacar los factores que podamos fuera de las raíces, o simplificarlas. Por ejemplo:

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{2^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} =$$

$$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} + \sqrt[4]{4} = \sqrt{2^3} + \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Piensa y practica

4. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

5. ¿Cuál de los dos es mayor en cada caso?

a) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132\,650}$

6. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

7. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $\sqrt[5]{64}$

8. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ e) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)$ f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

9. Efectúa.

$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

Observa

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Es más difícil hacer:

```
1,00000000 |_1,4142___
 0100600     0,7071...
  016060
   01918
```

que hacer:

```
1,4142... |_2_______
 014        0,7071...
  02
   0
```

y obtenemos el mismo resultado.

Recuerda

Racionalizar es hacer racional algo que no lo era.

En la web

- Practica el producto y el cociente de expresiones con $a + b\sqrt{c}$.
- Practica las operaciones con radicales.
- Test de operaciones con radicales.

Ten en cuenta

- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- A la expresión $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ se le llama **conjugado** de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

  Y al contrario, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es el conjugado de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Racionalización del denominador

Antiguamente, cuando no existían instrumentos de cálculo como los de ahora, había que esmerarse en conseguir métodos para aliviar las operaciones. Por ejemplo, para calcular a mano $\frac{1}{\sqrt{2}}$, se puede hacer directamente (calcular unas cuantas cifras de $\sqrt{2}$ y luego dividir 1 entre el resultado). Pero los cálculos se simplifican extraordinariamente si se tiene en cuenta que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si haces la operación de las dos formas, verás que es mucho más ventajoso suprimir el radical del denominador (ver margen).

Aunque actualmente, con las sencillas y potentes herramientas de cálculo que poseemos, es innecesario, aún se tiende a dar los resultados finales de los problemas mediante expresiones numéricas que no tengan radicales en el denominador.

Al proceso por el cual hacemos desaparecer los radicales del denominador se le llama **racionalización del denominador.**

En cada caso, nos haremos esta pregunta: *¿por qué expresión he de multiplicar el denominador para que el producto no tenga radicales?* Una vez encontrada la expresión, también multiplicaremos por ella el numerador para que el resultado final no varíe.

1.$^{\text{er}}$ CASO: RAÍCES CUADRADAS. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2.° CASO: OTRAS RAÍCES. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

3.$^{\text{er}}$ CASO: SUMAS Y RESTAS DE RAÍCES. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{3 + \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$$

Piensa y practica

En la web Refuerza tus conocimientos con nuevos ejercicios de racionalización.

10. Racionaliza los denominadores.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ e) $\dfrac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ f) $\dfrac{3}{2 - \sqrt{3}}$

Sugerencias

- Puede ser muy formativo para los estudiantes mostrarles el porqué de racionalizar un denominador:

  Antes del uso de la calculadora, para hallar el valor de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ había que hacer a mano la división 1 : 2,2360679…

  El cociente de esta división, además de resultar largo y complicado, varía al añadir cifras decimales al divisor. Así, siempre que se quiere añadir una cifra más al divisor para afinar los cálculos, hay que empezar de nuevo.

  Esto se puede evitar racionalizando.

  Una vez racionalizado el denominador, es extraordinariamente más cómodo realizar los cálculos y, además, se pueden añadir tantas cifras decimales al dividendo como se quiera sin variar el cociente obtenido hasta ese momento.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 1, apartados desde el a) hasta el g), de la pág. 24. Ejercicio 1, apartados desde el a) hasta el e) y del k) hasta el n), de la pág. 26. Ejercicio 1, apartados desde el a) hasta el o), de la pág. 27. Ejercicio 1, apartados a) y b), de la pág. 28. Ejercicio 1, apartados a) y b), de la pág. 30.

  Ampliación: Ejercicio 1, apartados desde el h) hasta el l), de la pág. 24. Ejercicio 1, apartados desde el f) hasta el j) y desde el ñ) hasta el q), de la pág. 26. Ejercicio 1, apartado p), de la pág. 27. Ejercicio 1, apartados desde el c) hasta el h), de la pág. 28. Ejercicio 1, apartados desde el c) hasta el g), de la pág. 30.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicios 5 y 6 de Practica, ficha A. Ejercicio 6 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

4 a) $\sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) y^2 d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt{3}$

5 a) $\sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

6 a) $\sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[5]{a^2b^3}$

7 a) $2x\sqrt[3]{4x}$

b) $3ab\sqrt[3]{3b^2c}$

c) $2\sqrt[5]{2}$

8 a) $\sqrt[3]{3^2}$ b) $\sqrt[10]{2^3}$

c) $\dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$ d) a^4

e) $\sqrt[6]{x^{11}}$ f) 2

9 a) $5\sqrt{2}$

10 a) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{7}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ d) $\dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}$

e) $4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ f) $6 + 3\sqrt{3}$

5 Números aproximados. Errores

Observa

a) 34 m tiene 2 cifras significativas.

b) 0,0863 hm^3 tiene 3 cifras significativas.

c) 53 000 *l* es posible que solo tenga 2 cifras significativas si los ceros del final solo han servido para designar el número. En tal caso, lo mejor sería poner 53 miles de litros.

Observa

a) $\begin{cases} \text{Medición: } 34 \text{ m} \\ \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ m} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Medición: } 0,0863 \text{ hm}^3 \\ \text{Error abs.} < 0,00005 \text{ hm}^3 \\ \text{Es decir, error abs.} < 50 \text{ m}^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Medición: } 53 \text{ miles de } l \\ \text{Error absoluto} < 500\ l \end{cases}$

Observa

Los errores relativos de las mediciones anteriores son:

a) E.r. $< \dfrac{0,5}{34} < 0,015 = 1,5\,\%$

b) E.r. $< \dfrac{0,00005}{0,0863} < 0,0006 = 0,06\,\%$

c) E.r. $< \dfrac{500}{53\,000} < 0,0095 < 0,01 = 1\,\%$

Aproximación y errores

En las aplicaciones prácticas se suelen manejar números aproximados. Recordemos algunos conceptos y procedimientos con los que se controla su uso.

Se llaman **cifras significativas** las que se usan para expresar un número aproximado. Solo se deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste y de modo que sean relevantes para lo que se desea transmitir.

Por ejemplo, si al medir la capacidad de una piscina se obtiene 718 900 *l*, sería más razonable decir que tiene 719 m^3, utilizando solo 3 cifras significativas. Pero si la medición no fue muy fina, lo propio sería decir 720 m^3 o, mejor, 72 decenas de m^3.

Error absoluto de una medida aproximada es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

Error absoluto = |Valor real – Valor aproximado|

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo: **el error absoluto es menor que…** Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.

En el ejemplo anterior (capacidad de la piscina: 719 m^3), la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto *es menor que medio metro cúbico* (error < 0,5 m^3).

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real. Es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan. El error relativo también se suele expresar en tantos por ciento (%).

En el ejemplo, el error relativo es menor que $\dfrac{0,5}{719} < 0,0007 = 0,07\,\%$

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar con un número razonable de cifras significativas las siguientes cantidades:***

a) Visitantes en un año a una pinacoteca: 183 594.

b) Asistentes a una manifestación: 234 590.

c) Número de bacterias en 1 dm³ de cierto preparado: 302 593 847.

a) Puede ser razonable que esta cantidad se dé con tanta precisión, pues los asistentes a un museo pagan una entrada que, lógicamente, se contabiliza. Suponemos que ese número, 183 594, es el de entradas vendidas.

No obstante, para cierto tipo de comunicaciones podría simplificarse la cifra: "casi doscientos mil", "más de ciento ochenta mil" son valoraciones adecuadas.

b) Es imposible que nadie haya contado los manifestantes con tanta precisión. Aunque la cifra no esté "hinchada" o "achicada" por razones sectarias, no se puede afinar tanto en estas valoraciones. Razonable sería decir, por ejemplo, "más de doscientos mil", o bien "entre 200 000 y 250 000".

c) Una o, como mucho, dos cifras significativas es lo que este tipo de cantidades permite afinar: 3 cientos de millones de bacterias o 30 decenas de millones.

2. ***Dar una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido en cada una de las valoraciones que se han dado en las cantidades del ejercicio anterior.***

a) Si decimos que el número de visitantes es 180 mil (o mejor, 18 decenas de miles) cometemos un error absoluto de 183 594 – 180 000 = 3 594 personas. Lo sabemos con precisión porque conocemos la cantidad exacta. Sin embargo, quien reciba la información (18 decenas de miles) deberá entender que puede haber un error de hasta 5 unidades de la primera cifra no utilizada: 5 000 personas. Resumiendo:

Valoración: 180 mil

Error absoluto < 5 000

Error relativo $< \dfrac{5\,000}{180\,000} < 0,028 < 0,03 \rightarrow$ E.r. $< 0,03 = 3\,\%$

b) Valoración: 200 000

Error absoluto < 50 000

Error relativo $< \dfrac{50\,000}{200\,000} = 0,25 = 25\,\%$

c) Valoración: 3 cientos de millones = 300 millones

Error absoluto < 0,5 decenas de millones = 5 millones

Error relativo $< \dfrac{5}{300} < 0,017 < 0,02 \rightarrow$ E.r. $< 0,02 = 2\,\%$

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

a) Decir que en una cierta piscina caben 147 253 892 miles de gotas de agua es correcto si las mediciones se han hecho con mucha precisión.

b) Decir que en una cierta piscina caben 147 253 892 miles de gotas de agua no es nada razonable, pues es imposible conseguir tantísima precisión en las mediciones. Sería mucho más sensato afirmar que caben 15 decenas de miles de millones de gotas.

c) Si estimamos correctamente que el número de gotas de agua que caben en una piscina es 15 decenas de miles de millones, estamos cometiendo un error absoluto menor que media decena de miles de millones de gotas; es decir, E. abs. < 5 000 000 000 gotas.

d) Si el error relativo cometido en una cierta medición es menor que 0,019, podemos decir que es menor que el 19 %.

e) Si el error relativo cometido en una cierta medición es menor que 0,019, podemos afirmar que es menor que el 2 %.

f) La calculadora nos dice que $\pi = 3,14159265$. Si tomamos $\pi = 3,14$, podemos afirmar que cometemos un error absoluto menor que 0,00159266, pero es más razonable decir que E. abs. < 0,0016 o, incluso, E. abs. < 0,002.

2. Explica por qué no es razonable decir que en un saco hay 11 892 583 granos de arroz.

Exprésalo de forma adecuada y acota el error absoluto y el error relativo que se cometen con esa expresión.

3. Da una cota del error absoluto y otra del error relativo que cometes cuando pones $\pi = 3,1416$.

Sugerencias

- El hecho de trabajar con números decimales nos obliga a elegir una aproximación de los mismos. Por ello, se comete un error por defecto o por exceso.
- Más que la aplicación exacta de lo que son los errores y las cotas de error, conviene prestar atención a la relación del error absoluto con el orden de la última cifra significativa utilizada, y del error relativo con la cantidad de cifras significativas.
- A modo de reflexión, se podría comentar que una cota del error relativo es $\varepsilon/(estimación - \varepsilon)$, siendo ε una cota del error absoluto. En la práctica, no es necesario que los estudiantes afinen tanto, y basta que tomen $\varepsilon/estimación$ como una cota del error relativo.
- Los conceptos de cifras significativas, aproximación, errores y cotas de error resultan difíciles para los estudiantes cuando se explican desde un punto de vista teórico. Los entienden mucho mejor con ejemplos prácticos.
- Esto es lo que pretendemos con los ejercicios resueltos de estas páginas, en los que las soluciones se dan de un modo muy razonado para analizar la conveniencia de una u otra respuesta.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2, 3 y 5 de la pág. 6.

  Ampliación: Ejercicios 4, 6 y 7 de la pág. 7.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 4 de Practica, ficha B.

  Ampliación: Ejercicios 1, 2, 3 y 4 de Aplica, ficha A. Ejercicio 3 de Aplica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) F b) V c) V

d) F e) V f) V

2 Es imposible conseguir tanta precisión en las mediciones.

Expresión más adecuada: 12 millones.

Error absoluto < 500 000

Error relativo < 4,2 %

3 Error absoluto < 0,00005

Error relativo < 0,002 %

ANOTACIONES

6 Números en notación científica. Control del error

Ejercítate

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000 b) 0,00000319
c) $25 \cdot 10^6$ d) $0,04 \cdot 10^9$
e) $480 \cdot 10^{-8}$ f) $0,05 \cdot 10^{-8}$

Los números $3,845 \cdot 10^{15}$ y $9,8 \cdot 10^{-11}$ están en notación científica porque:

— Están descritos mediante dos factores: un número decimal y una potencia de 10.

— El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.

— La potencia de 10 es de exponente entero.

El primero, $3,845 \cdot 10^{15} = 3\,845\,000\,000\,000\,000$, es un número "grande".

El segundo, $9,8 \cdot 10^{-11} = 0,000000000098$, es un número "pequeño".

Esta forma de expresión resulta muy cómoda para tratar con cantidades aproximadas muy grandes o muy pequeñas, pues:

- De un solo golpe de vista se aprecia el "tamaño" del número. Se ve en el segundo factor y lo da el exponente del 10.
- Se constata la precisión con la que se da la cantidad. Depende del número de cifras significativas del primer factor.

Por ejemplo, apreciamos que $7,6 \cdot 10^8$ y $7,603 \cdot 10^8$ son aproximadamente iguales ("tamaños muy parecidos") pero la segunda está dada con más precisión.

Otro ejemplo

$7,6 \cdot 10^8$ y $7,60 \cdot 10^8$, aparentemente iguales, no lo son, pues la segunda es más precisa y está dada con una cifra significativa más.

Ejercicio resuelto

Nos dicen que la población de China es 1 300 millones de habitantes.

a) Expresar la cantidad en notación científica.

b) ¿Es una cantidad exacta o aproximada?

c) Dar una cota del error absoluto teniendo en cuenta cómo se da el dato.

d) Dar una cota del error relativo.

a) 1 300 millones = $1,3 \cdot 10^9$ habitantes

b) Se trata, obviamente, de un número aproximado, pues es imposible calcular con toda precisión una cantidad tan enorme, tan dispersa y tan cambiante.

c) y d) Cuando nos dicen 1 300 millones, se supone que las dos primeras cifras están controladas. Pero es posible que alguno de los ceros que vienen a continuación también estén controlados.

— Si en la medición solo se controlan las dos primeras cifras:

Medición: 13 cientos de millones de personas.

Error absoluto < 0,5 cientos de millones = 50 000 000

Error relativo < 0,5/13 < 0,038 = 3,8 %

— Si en la medición se controla el primer cero de la cantidad:

Medición: 130 decenas de millones de personas. En este caso, se puede poner en notación científica así: $\mathbf{1,30 \cdot 10^9}$. Observa que *la presencia del 0 detrás de la coma decimal significa que esa cifra está controlada.*

Error absoluto < 0,5 decenas de millones = 5 000 000

Error relativo < 0,5/130 < 0,0038 = 0,38 %

Piensa y practica

1. Efectúa. Después, repasa con la calculadora:

a) $(6,4 \cdot 10^5) \cdot (5,2 \cdot 10^{-6})$

b) $(2,52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6})$

c) $7,92 \cdot 10^6 + 3,58 \cdot 10^7$

d) $6,43 \cdot 10^{10} + 8,113 \cdot 10^{12} - 8 \cdot 10^{11}$

2. La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.

a) Exprésala en notación científica.

b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.

c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.

d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

24

7 Logaritmos

¿Por qué los logaritmos?

Varios siglos antes de la irrupción de las calculadoras, los logaritmos se inventaron para aliviar las enormes operaciones que había que realizar a mano. ¿Cómo? Convirtiendo los productos y cocientes en sumas y restas (es claro que son mucho más cómodas estas operaciones que aquellas). Para ello, había que recurrir a unas enormes tablas (dadas en libros muy gordos) en donde se podían encontrar los logaritmos de los factores.

Y ahora que tenemos calculadoras, ¿por qué los logaritmos? Pues un poco por cuestión cultural pero, también, porque nos encontraremos con ellos en simplificaciones algebraicas y en expresiones funcionales extraídas del mundo de la ciencia o de la técnica.

La igualdad $2^3 = 8$ se puede poner también así: $log_2 8 = 3$.

$log_2 8$ se lee "logaritmo en base 2 de 8".

Análogamente podemos decir:

$log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

$log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ porque $5^{1/2} = \sqrt{5}$

$log_{10} 1\,000\,000 = 6$ porque $10^6 = 1\,000\,000$

$log_{10} 0,0001 = -4$ porque $10^{-4} = 1/10^4 = 0,0001$

Se llama **logaritmo** en base a de P, y se escribe $log_a P$, al exponente al que hay que elevar la base a para obtener P.

$$log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

Propiedades de los logaritmos

1. Dos logaritmos sencillos

$log_a a = 1 \qquad log_a 1 = 0$

El logaritmo de la base es 1 y el logaritmo de 1 es 0 en cualquier base.

2. Producto y cociente

$log_a (P \cdot Q) = log_a P + log_a Q \qquad log_a \frac{P}{Q} = log_a P - log_a Q$

Es decir, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores y el logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

Por ejemplo:

$$log_2 \frac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = log_2 8 + log_2 \sqrt[3]{4} - log_2 \sqrt{2}$$

3. Potencia y raíz

$log_a P^k = k\, log_a P \qquad log_a \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n} log_a P$

Es decir, el logaritmo de una potencia (P^k o bien $\sqrt[n]{P} = P^{1/n}$) es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

Por ejemplo:

$$log_5 \sqrt{125} = \frac{1}{2} log_5 125 = \frac{1}{2} log_5 5^3 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

4. Cambio de base

$$log_b P = \frac{log_a P}{log_a b}$$

Si sabemos calcular logaritmos en base a, podremos calcular, gracias a esta fórmula, logaritmos en cualquier base, b.

Comprobación

$$\frac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2^3 \cdot 2^{2/3}}{2^{1/2}} = 2^{3+2/3-1/2} = 2^{19/6}$$

$$\left.\begin{array}{l} log_2 8 = log_2 2^3 = 3 \\ log_2 \sqrt[3]{4} = log_2 2^{2/3} = \frac{2}{3} \\ log_2 \sqrt{2} = log_2 2^{1/2} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{19}{6}$$

En la web

- Ejercicios de logaritmos.
- Practica las propiedades de los logaritmos.

25

Sugerencias

- Los estudiantes ya conocen la notación científica de cursos anteriores. En este curso debemos comprobar que saben identificar, expresar y operar con números en notación científica tanto manualmente como con calculadora. Los ejercicios resueltos de esta página insisten en ello.
- Es necesario reflexionar sobre la idea de aproximación cuando trabajamos con notación científica, y sobre cuál es el orden del error cometido. En la resolución del ejercicio 2 del "Piensa y practica" se da respuesta a esta cuestión.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 1 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2, 3 y 4 de la pág. 8. Ejercicio 1 de la pág. 11.

  Ampliación: Ejercicio 1 de la pág. 9. Ejercicio 2 de la pág. 10.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 4 de Practica, ficha A. Ejercicio 5 de Practica, ficha B.

  Ampliación: Ejercicios 1 y 2 de Aplica, ficha B.

Soluciones de "Ejercítate"

a) $3,4 \cdot 10^5$ b) $3,19 \cdot 10^{-6}$ c) $2,5 \cdot 10^7$

d) $4 \cdot 10^7$ e) $4,8 \cdot 10^{-6}$ f) $5 \cdot 10^{-10}$

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) 3,328 b) $6,3 \cdot 10^9$ c) $4,372 \cdot 10^7$ d) $7,3773 \cdot 10^{12}$

2 a) $1,49 \cdot 10^8$ km b) $1,5 \cdot 10^{13}$ cm c) $1,490 \cdot 10^{13}$ cm

d) CASO a) E.A.< 0,005 cientos de millones de kilómetros

E.R. $< \frac{0,005}{1,49} < 0,00336$

CASO b) E.A.< 0,05 decenas de billones de centímetros

E.R. $< \frac{0,05}{1,5} < 0,033$

CASO c) E.A.< 0,0005 decenas de billones de centímetros

E.R. $< \frac{0,0005}{1,490} < 0,000336$

Sugerencias

- Se presenta el concepto de logaritmo de un modo intuitivo a partir de las potencias y sus propiedades. Se define el logaritmo como un exponente al que hay que elevar un número para obtener otro. Será necesario recordar las propiedades de las potencias para aplicar esta definición y para justificar las propiedades que estudiaremos a continuación.
- Volveremos a encontrarnos con los logaritmos en la unidad 6, donde se estudian las funciones exponencial y logarítmica como funciones recíprocas.
- El estudio de los logaritmos se puede presentar acompañado de su historia, puesto que esto hace que el alumnado vea las matemáticas como una ciencia viva que evoluciona a lo largo del tiempo.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 3 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 29.

  Ampliación: Ejercicios 3 y 4 de la pág. 29.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 7 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicio 7 de Practica, ficha B.

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales** y son los más utilizados. Por eso, la tecla [log] de las calculadoras es para el cálculo de logaritmos decimales. (También en el uso habitual podemos poner log en lugar de log_{10}).

Con la tecla [log] calculamos directamente logaritmos decimales. Por ejemplo:

[log] 10 000 [=] [4] $\rightarrow log_{10}\ 10\,000 = 4$

[log] 2 [=] [0.30103] $\rightarrow log_{10}\ 2 = 0{,}3$

También podemos calcular logaritmos en una base cualquiera, b:

$$log_b\, x = \frac{log_{10} x}{log_{10} b} \quad \text{(Propiedad 4)}$$

Por ejemplo, para calcular $log_7\ 80 = log_{10}\ 80/log_{10}\ 7$, procedemos así:

[log] 80 [÷] [log] 7 [=] [2.251916224] $\rightarrow log_7\ 80 = 2{,}2519\ldots$

Ejercicios resueltos

1. ***Decir el valor de estos logaritmos poniendo los números en forma de potencias:***
a) $log_6\ 1296$ b) $log_2\ 0{,}125$

a) $1\,296 = 6^4$. Por tanto, $log_6\ 1\,296 = 4$.

b) $0{,}125 = \frac{125}{1\,000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

Por tanto, $log_2\ 0{,}125 = -3$.

2. ***Con la tecla [log] de la calculadora, hallar $log\ 5$, $log\ 50$, $log\ 500$, $log\ 5\,000$.***
Todos ellos tienen la misma parte decimal. ¿Por qué?

$log\ 5 = 0{,}69897\ldots$ $log\ 50 = 1{,}69897\ldots$

$log\ 500 = 2{,}69897\ldots$ $log\ 5\,000 = 3{,}69897\ldots$

Tienen la misma parte decimal porque todos ellos son del tipo:

$$log_{10}\,(5 \cdot 10^n) = log_{10}\ 5 + n\ log_{10}\ 10 = n + log_{10}\ 5$$

$log_{10}\ 5$ es la parte decimal de todos ellos. Y, en cada caso, se le suma un número entero, n.

3. ***Hallar, con la calculadora:***
a) $log_2\ 1\,024$
b) $log_5\ 300$

a) $log_2\ 1\,024 = \frac{log_{10}\ 1\,024}{log_{10}\ 2}$; [log] 1 024 [÷] [log] 2 [=] [10] $\rightarrow log_2\ 1\,024 = 10$

b) $log_5\ 300 = \frac{log_{10}\ 300}{log_{10}\ 5}$; [log] 300 [÷] [log] 5 [=] [3.54...] $\rightarrow log_5\ 300 = 3{,}54\ldots$

Piensa y practica

1. Halla estos logaritmos basándote en la definición:

a) $log_5\ 125$ b) $log_5\ 0{,}04$ c) $log_2\ 128$

d) $log_2\ 0{,}0625$ e) $log_a\ 1$ f) $log_{10}\ 0{,}0001$

g) $log_2\left(1/\sqrt{2}\right)$ h) $log_3\ (1/3)$ i) $log_3 \sqrt[5]{9}$

2. Averigua la base de los siguientes logaritmos:

a) $log_a\ 10\,000 = 2$ b) $log_b\ 216 = 3$

c) $log_c\ 125 = 6$ d) $log_d\ 3 = \frac{1}{2}$

3. Halla, con la tecla [log] de la calculadora:

a) $log_2\ 740$ b) $log_3\ 100$ c) $log_5\ 0{,}533$ d) $log_8\ 0{,}004$

Comprueba la validez de cada solución con la tecla [x^y].

4. Halla con la calculadora $log_{10}\ 7$ y $log_{10}\ 70$ y explica por qué ambos tienen la misma parte decimal.

5. a) Expresa $A = \frac{\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{4}}{1\,024}$ como potencia de base 2.

b) Halla $log_2\ A$ y comprueba que coincide con:

$log_2 \sqrt[5]{8} + log_2 \sqrt[3]{4} - log_2\ 1\,024$

26

Ejercicios y problemas resueltos

UNIDAD 1

1. Potencias y radicales

a) Expresar en forma de potencia:

$$\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3^3}}}{\sqrt[6]{2^{-3}}}$$

b) Simplificar la siguiente expresión:

$$(3\sqrt{3} + \sqrt{6})\,\sqrt{8} - \frac{\sqrt{54}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

c) Comprobar que al reducir esta expresión se obtiene $\sqrt{2}$:

$$\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{3}}$$

Hazlo tú.

a) Expresa como potencia:

$$\frac{\sqrt{3^x}}{9} : \sqrt{\frac{1}{3}}$$

b) Simplifica: $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{162}}{2}$

a) Expresamos las raíces como potencias de exponente fraccionario y operamos aplicando las propiedades de las potencias:

$$\frac{(2 \cdot 3 \cdot 3^{3/2})^{1/3}}{2^{-3/6}} = \frac{2^{1/3} \cdot 3^{1/3} \cdot 3^{1/2}}{2^{-1/2}} = 2^{5/6} \cdot 3^{5/6} = 6^{5/6}$$

b) Efectuamos la multiplicación indicada: $3\sqrt{24} + \sqrt{48} - \frac{\sqrt{54}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Racionalizamos el denominador: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Sacamos de las raíces los factores posibles:

$$3\sqrt{2^3 \cdot 3} + \sqrt{2^4 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3^3 \cdot 2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} = 3 \cdot 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2} =$$

$$= \left(6 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{6} + 4\sqrt{3} = \frac{23}{4}\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$$

c) Multiplicamos numerador y denominador por el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})\,(2 - 3\sqrt{3})}{(2 + 3\sqrt{3})\,(2 - 3\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{6} - 9\sqrt{18} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{6}}{4 - 9 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-9 \cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{-23} = \frac{-23\sqrt{2}}{-23} = \sqrt{2}$$

2. Interés compuesto y errores

Un capital de 20 millones de yenes se ha colocado en un banco durante 5 años, con periodo de capitalización anual, y se ha convertido en $2{,}387 \cdot 10^7$ yenes, aproximadamente.

a) Dar una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido en esa aproximación.

b) ¿Qué interés se ha aplicado?

a) E. abs. $< 0{,}0005 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^3$ yenes; E. rel. $< 5 \cdot 10^3/2{,}387 \cdot 10^7 = 0{,}0002$

b) Sabemos que $C_F = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \rightarrow 2{,}387 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^7\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{2{,}387 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^7} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \rightarrow 1{,}1935 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$$

Extraemos la raíz quinta a los dos miembros de la igualdad para despejar r:

$$\sqrt[5]{1{,}1935} = \sqrt[5]{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5} \rightarrow 1{,}036011 = 1 + \frac{r}{100} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}036011 = \frac{r}{100} \rightarrow r = 3{,}6\,\%$$

Hazlo tú. ¿En cuánto se convertiría ese capital al mismo interés anual durante 5 años con periodo de capitalización mensual?

3. Logaritmos

Hallar el valor de x en cada caso:

a) $3 = 5 + log\ x$

b) $log_x\ 36 = 2$

c) $log\ x + 2log\ 5 = 2$

Aplicamos la definición de logaritmo en cada caso:

a) $3 - 5 = log\ x \rightarrow x = 10^{-2}$ b) $x^2 = 36 \rightarrow x = 6$ ($x = -6$ no vale)

c) Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$$log\ x + log\ 5^2 = 2 \rightarrow log\,(x \cdot 5^2) = 2 \rightarrow 25x = 10^2 \rightarrow x = 4$$

Hazlo tú. Calcula x en cada caso: a) $log_3\ x = \frac{1}{2}$ b) $2log\ x - log\ 4 = -2$

27

Sugerencias

- Los estudiantes deben comprobar que la propiedad de cambio de base que se estudió en la página anterior, la definición de los logaritmos decimales y su presencia en la calculadora, nos permite hallar el valor de logaritmos en cualquier base.
- Con la tecla [log] de la calculadora y su inversa, [10^x], podemos hacer comprobaciones y pequeñas investigaciones como la del ejercicio resuelto 2.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 3 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 5 de la pág. 30.

  Ampliación: Ejercicio 6 de la pág. 30.

Soluciones de “Piensa y practica”

1 a) 3 b) –2 c) 7 d) –4 e) 0
f) –4 g) –1/2 h) –1 i) 2/5

2 a) 100 b) 6 c) $\sqrt{5}$ d) 9

3 a) 9,53138… b) 4,1918… c) –0,39096… d) –2,65526…

4 $log_{10}\ 7 = 0{,}84509804$

$log_{10}\ 70 = 1{,}84509804$

Tienen la misma parte decimal porque $log_{10}\ 70 = log_{10}\ 7 + 1$.

5 a) $2^{-131/5}$

b) Los dos resultados son $-\frac{131}{15}$.

Sugerencias

- En la página de “Ejercicios y problemas resueltos” se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar que serán útiles a los estudiantes para enfrentarse a la resolución de las actividades que se les proponen a continuación o en las páginas finales de la unidad. Su fin último es que los estudiantes sean capaces de reproducir procedimientos similares cada vez que se encuentren ante una situación problemática.
- En concreto, se profundiza en las propiedades y operaciones con potencias y radicales y en el cálculo con logaritmos presentado en forma de ecuaciones logarítmicas muy sencillas.
- Tiene especial interés el problema resuelto 2 porque propone solucionar una situación real en un contexto de cálculo de interés compuesto que se estudió en el curso anterior. En su resolución intervienen varios de los conceptos trabajados en esta unidad: notación científica, errores y cálculo con potencias y raíces.

Pensamiento crítico

Se sugiere la siguiente actividad:

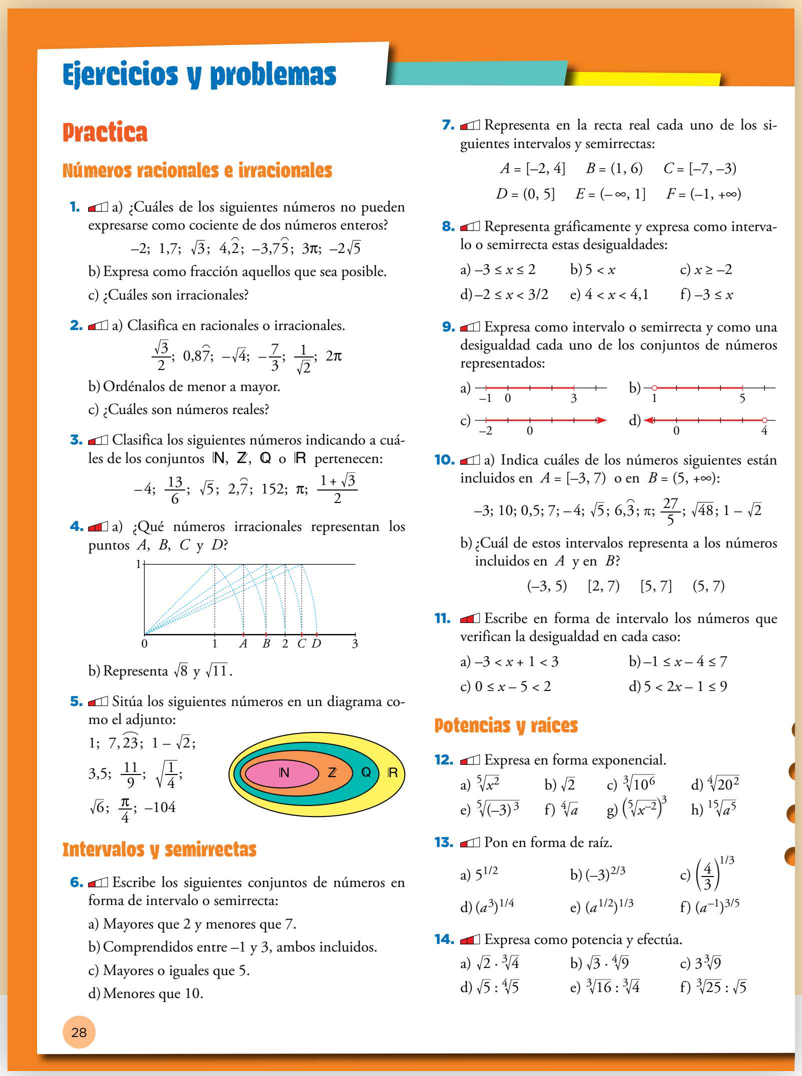
Los estudiantes, en un primer momento, resolverán las propuestas de la página individualmente o en pequeño grupo. Después, contrastarán sus procesos y soluciones con los del texto y verbalizarán los aciertos, diferencias, errores, etc.

Soluciones de “Hazlo tú”

1 a) $3^{\frac{x-3}{2}}$ b) $2 - \frac{11}{2}\sqrt{2}$

2 $2{,}394 \cdot 10^7$ yenes

3 a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5}$



Ejercicios y problemas

Practica

Números racionales e irracionales

1. a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2. a) Clasifica en racionales o irracionales.

$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

3. Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:

$-4;\ \frac{13}{6};\ \sqrt{5};\ 2{,}\widehat{7};\ 152;\ \pi;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

4. a) ¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D?

b) Representa $\sqrt{8}$ y $\sqrt{11}$.

5. Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:

$1;\ 7{,}\widehat{23};\ 1-\sqrt{2};$

$3{,}5;\ \frac{11}{9};\ \sqrt{\frac{1}{4}};$

$\sqrt{6};\ \frac{\pi}{4};\ -104$

Intervalos y semirrectas

6. Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

7. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:

$A = [-2, 4]$ $B = (1, 6)$ $C = [-7, -3)$

$D = (0, 5]$ $E = (-\infty, 1]$ $F = (-1, +\infty)$

8. Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:

a) $-3 \le x \le 2$ b) $5 < x$ c) $x \ge -2$

d) $-2 \le x < 3/2$ e) $4 < x < 4{,}1$ f) $-3 \le x$

9. Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:

10. a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:

$-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$(-3, 5)$ $[2, 7)$ $[5, 7]$ $(5, 7)$

11. Escribe en forma de intervalo los números que verifican la desigualdad en cada caso:

a) $-3 < x + 1 < 3$ b) $-1 \le x - 4 \le 7$

c) $0 \le x - 5 < 2$ d) $5 < 2x - 1 \le 9$

Potencias y raíces

12. Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{10^6}$ d) $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ f) $\sqrt[4]{a}$ g) $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ h) $\sqrt[15]{a^5}$

13. Pon en forma de raíz.

a) $5^{1/2}$ b) $(-3)^{2/3}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ e) $(a^{1/2})^{1/3}$ f) $(a^{-1})^{3/5}$

14. Expresa como potencia y efectúa.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{9}$ c) $3\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$ e) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

28

Aprendizaje cooperativo

Para estas páginas, y para todas aquellas destinadas a reforzar la destreza operativa, se sugiere la siguiente metodología:

— El alumnado se distribuye en pequeños grupos (dos, tres por grupo).

— Resuelven una serie de actividades individualmente y, después, contrastan las soluciones y los procesos.

— Si hay discrepancias, deben descubrir los errores. Si no saben resolver las dudas o no se ponen de acuerdo, actuará el docente.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 a) $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$

b) $-2 = \frac{-4}{2}$; $1{,}7 = \frac{17}{10}$; $4{,}\widehat{2} = \frac{38}{9}$; $-3{,}7\widehat{5} = -\frac{169}{45}$

c) $\sqrt{3}$; 3π

2 a) Racionales: $0{,}8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\frac{7}{3}$

Irracionales: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

b) $-\frac{7}{3} < -\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

c) Todos son reales.

3 $-4 \in \mathbb{Z}$

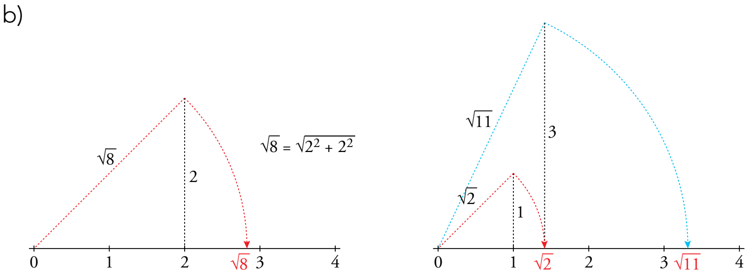
$\frac{13}{6}$; $2{,}\widehat{7} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{5}$; π; $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}$

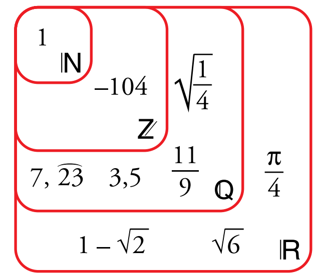
$152 \in \mathbb{N}$

4 a) $A = \sqrt{2}$; $B = \sqrt{3}$; $C = \sqrt{5}$; $D = \sqrt{6}$

b)

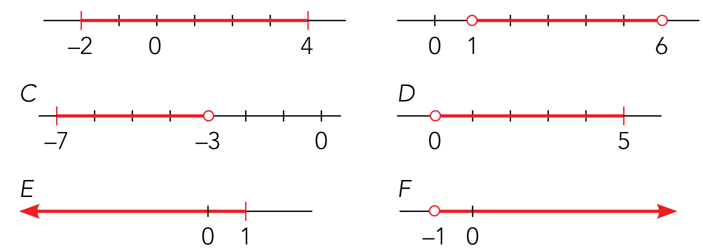


5

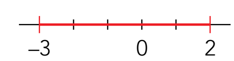


6 a) $(2, 7)$ b) $[-1, 3]$ c) $[5, +\infty)$ d) $(-\infty, 10)$

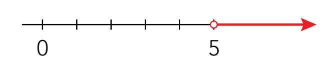
7



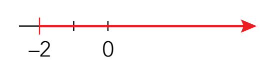
8 a) $-3 \le x \le 2$ $[-3, 2]$



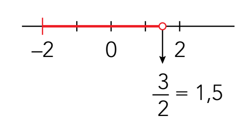
b) $5 < x$ $(5, +\infty)$



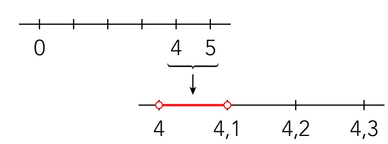
c) $x \ge -2$ $[-2, +\infty)$



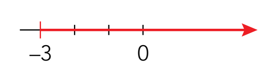
d) $-2 \le x < \frac{3}{2}$ $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$



e) $4 < x < 4{,}1$ $(4; 4{,}1)$



f) $-3 \le x$ $[-3, +\infty)$



9 a) $[-1, 3]$ b) $(1, 5]$ c) $[-2, +\infty)$ d) $(-\infty, 4)$

$-1 \le x \le 3$ $1 < x \le 5$ $x \ge -2$ $x < 4$

10 a) Todos excepto -4.

b) $(5, 7)$

11 a) $(-4, 2)$ b) $[3, 11]$ c) $[5, 7)$ d) $(3, 5]$

12 a) $x^{2/5}$ b) $2^{1/2}$ c) 10^2 d) $20^{1/2}$

e) $(-3)^{3/5}$ f) $a^{1/4}$ g) $x^{-6/5}$ h) $a^{1/3}$

13 a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

14 a) $2^{7/6}$ b) 3 c) $3^{5/3}$

d) $5^{1/4}$ e) $2^{2/3}$ f) $5^{1/6}$

15. Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt{a}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

16. Expresa como potencia y calcula x en cada caso igualando los exponentes de los dos miembros:

a) $\sqrt{3^{x+1}}=\dfrac{1}{27}$ b) $\dfrac{(\sqrt{3})^{-x}}{81}=1$ c) $\dfrac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}=2$

Radicales

17. Simplifica.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[12]{a^8}$ c) $\sqrt[5]{a^{15}}$
d) $\sqrt[8]{a^2b^4}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ f) $\sqrt[3]{a^6b^9}$

18. Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{6}$ b) $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt[4]{a}$ c) $\sqrt{a^{-1}}\,\sqrt[3]{a^{-3}}\,\sqrt[6]{a^5}$

19. Extrae del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ b) $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ c) $\sqrt{8a^5}$
d) $\sqrt[3]{\dfrac{24}{a^4}}$ e) $\sqrt{\dfrac{162}{75}}$ f) $\sqrt[5]{\dfrac{9}{32}}$

20. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:

$$\sqrt{7},\ \sqrt[3]{30},\ \sqrt[4]{40},\ \sqrt[6]{81}$$

21. Reduce a índice común y efectúa.

a) $\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}$
c) $\sqrt[6]{20}:\sqrt[4]{10}$ d) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\right):\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\right)$

22. Divide y simplifica.

a) $\sqrt{7}:\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}:\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ c) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}:\sqrt[3]{\dfrac{45}{4}}$

23. Efectúa.

a) $3\sqrt{28}-\sqrt{7}-\sqrt{63}$ b) $\sqrt[5]{96}+\sqrt[5]{\dfrac{3}{32}}$
c) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{2}+\sqrt[3]{375}-\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{3}}$ d) $\sqrt{\dfrac{7}{64}}+\sqrt{\dfrac{7}{4}}+\sqrt{\dfrac{4}{7}}$

24. Introduce dentro de la raíz y simplifica.

a) $5\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{18}}{3}$ c) $2\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}$
d) $2\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

25. Efectúa.

a) $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)$ b) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$
c) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}-4}-\sqrt{3\sqrt{2}+4}\right)^2$

26. Simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{18}}$ b) $\dfrac{\sqrt{8a}\,\sqrt[3]{4a^2}}{(\sqrt[4]{2a^5})^2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2a\sqrt[3]{2a^2}}}{\sqrt[4]{4a^3}}$

27. Racionaliza, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ e) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{6^2}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{81}}$

28. Racionaliza, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$
d) $\dfrac{11}{2\sqrt{2}+3}$ e) $\dfrac{4a}{\sqrt[4]{2a^3b^2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

29. Simplifica.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4}-\dfrac{5}{2\sqrt{3}}-\sqrt[4]{9}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[6]{8}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

c) $\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a}+\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$

Números aproximados. Notación científica

30. Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de las siguientes aproximaciones:

a) $\dfrac{22}{7}\approx 3$ b) $\pi\approx 3{,}14$ c) $\sqrt{3}\approx 1{,}732$ d) $\Phi\approx 1{,}6$

31. Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de estas aproximaciones sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:

a) 128 mil euros b) 25 millones de euros
c) 648 500 € d) 3 200 €

32. Da una cota del error absoluto de estas aproximaciones y compara sus errores relativos:

a) $8\cdot10^5$ b) $5{,}23\cdot10^6$ c) $1{,}372\cdot10^7$
d) $2{,}5\cdot10^{-4}$ e) $1{,}7\cdot10^{-6}$ f) $4\cdot10^{-5}$

33. Calcula mentalmente.

a) $(1{,}5\cdot10^7)\cdot(2\cdot10^5)$ b) $(3\cdot10^6):(2\cdot10^{11})$
c) $(4\cdot10^{-7}):(2\cdot10^{-12})$ d) $\sqrt{4\cdot10^8}$

29

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

15 a) $a^{9/10}$ b) $x^{1/6}$ c) $a^{-3/4}$

16 a) $x=-7$ b) $x=-8$ c) $x=\dfrac{7}{6}$

17 a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ c) a^3
d) $\sqrt[4]{ab^2}$ e) $\sqrt[3]{a^2}$ f) a^2b^3

18 a) 6 b) $a^2\,\sqrt[12]{a}$ c) $\sqrt[3]{a^{-2}}$

19 a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt[2]{2a}$
d) $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{\dfrac{3}{a}}$ e) $\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

20 $\sqrt[6]{81}<\sqrt[4]{40}<\sqrt{7}<\sqrt[3]{30}$

21 a) $\sqrt[10]{8748}$ b) $\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[12]{\dfrac{2}{5}}$ d) $\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$

22 a) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{3^3}{5^3}}$ c) $\sqrt[6]{\dfrac{5\cdot2}{3^7}}$

23 a) $2\sqrt{7}$ b) $\dfrac{5\sqrt[5]{3}}{3}$ c) $\dfrac{9\sqrt[3]{3}}{2}$ d) $\dfrac{51\sqrt{7}}{56}$

24 a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{14}$
d) $\sqrt[4]{\dfrac{20}{3}}$ e) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

25 a) -7 b) $23-4\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{2}$

26 a) $2^{1/4}\cdot3^{5/6}$ b) $2^{5/3}\cdot a^{-4/3}$ c) $2^{1/6}\cdot a^{1/12}$

27 a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{20}}{10}$
d) $\dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{4}$ f) $\dfrac{2\sqrt[5]{3}}{3}$

28 a) $-\dfrac{3(1-\sqrt{3})}{2}$ b) $-3+2\sqrt{2}$ c) $\dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}$
d) $-11(2\sqrt{2}-3)$ e) $\dfrac{2\sqrt[4]{2^3ab^2}}{b}$ f) $4-\sqrt{15}$

29 a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ c) $\sqrt{3}$ d) $2+a$

30 a) E.A. < 0,5; E.R. < 0,16
b) E.A. < 0,005; E.R. < 0,0016
c) E.A. < 0,0005; E.R. < 0,00016
d) E.A. < 0,05; E.R. < 0,016

31 a) E.A. < 500 €; E.R. < 0,0039
b) E.A. < 500 000 €; E.R. < 0,02
c) E.A. < 50 €; E.R. < 0,000077
d) E.A. < 50 €; E.R. < 0,0156

32 a) $5\cdot10^4$ b) $5\cdot10^3$ c) $5\cdot10^{-6}$
d) $5\cdot10^{-6}$ e) $5\cdot10^{-8}$ f) $5\cdot10^{-6}$
El menor error relativo se da en c), y el mayor, en f).

33 a) $3\cdot10^{12}$ b) $1{,}5\cdot10^{-5}$ c) $2\cdot10^5$ d) $2\cdot10^4$

ANOTACIONES

Ejercicios y problemas

34. Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba, después, con la calculadora con 3 cifras significativas dando una cota del error absoluto cometido.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

e) $5{,}3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$ f) $3 \cdot 10^{-5} + 8{,}2 \cdot 10^{-6}$

g) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$ h) $7{,}2 \cdot 10^8 + 1{,}5 \cdot 10^{10}$

Logaritmos

35. Aplica la definición de logaritmo y calcula.

a) $\log_2 64$ b) $\log_2 16$ c) $\log_2 \frac{1}{4}$

d) $\log_2 \sqrt{2}$ e) $\log_3 243$ f) $\log_3 \frac{1}{27}$

g) $\log_3 \sqrt[3]{9}$ h) $\log 0{,}001$ i) $\log_5 0{,}2$

36. Halla con la calculadora.

a) $\log_2 23{,}4$ b) $\log_3 543$ c) $\log_5 0{,}06$

d) $\log_6 20{,}8$ e) $\log_5 \sqrt{123}$ f) $\log_2 0{,}87^2$

37. Calcula la base de los siguientes logaritmos:

a) $\log_b 10\,000 = 2$ b) $\log_b 125 = 3$

c) $\log_b \frac{1}{4} = -1$ d) $\log_b 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$

38. Calcula aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_4 16^3 + \log_4 2 + \log 0{,}0001 + \log \frac{\sqrt[3]{10}}{100}$$

39. Utiliza las propiedades de los logaritmos, como en el ejemplo, para obtener el valor de las expresiones siguientes:

- $\log 20 + \log 50 = \log 20 \cdot 50 = \log 1\,000 = 3$

a) $\log_2 400 - \log_2 25$ b) $\log_2 288 - 2\log_2 6$

c) $\log 4 + \log 0{,}025$ d) $\log_3 0{,}2 + \log_3 405$

Aplica lo aprendido

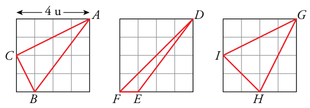
40. El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es $60\,\pi$ cm^3.

a) ¿Cuánto mide su radio?

b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

41. Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 de generatriz. Da el valor exacto.

42. Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.



43. Expresa como intervalo los números que verifican cada una de las siguientes desigualdades:

a) $|x| < 3$ b) $|x - 1| \leq 5$ c) $|x + 3| < 4$

¿Cómo expresarías los números que verifican las desigualdades contrarias a las anteriores? Es decir:

$|x| \geq 3$ $|x - 1| > 5$ $|x + 3| \geq 4$

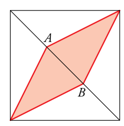
44. Averigua para qué valor de x se pueden calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x - 7}$ b) $\sqrt{5 - x}$ c) $\sqrt{-x}$ d) $\sqrt{x^2 + 1}$

45. ¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $3 + \sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$?

46. Los puntos *A* y *B* dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales.

Si el área del cuadrado es 36 cm^2, ¿cuánto medirá el lado del rombo? Da el valor exacto.



47. Si $\log x = 1{,}3$ y $\log y = 0{,}8$, calcula:

a) $\log (x \cdot y)$ b) $\log (x\sqrt{y})$ c) $\log \frac{y}{x^2}$ d) $\log \sqrt{\frac{x}{y}}$

48. Si $A = \frac{8x^2}{\sqrt{y}}$, calcula $\log_2 A$ sabiendo que $\log_2 x = 1{,}5$ y $\log_2 y = -0{,}6$.

49. Transforma estas expresiones en otras equivalentes tomando logaritmos:

a) $M = 10xy^3$ b) $N = \frac{z^3 y}{x^2}$ c) $P = x^2\sqrt{yz}$

50. Expresa M, en cada caso, sin logaritmos:

a) $\log M = \log (x - 3) + 2\log x$

b) $\log M = \log (x + 1) - \log y + \log 3$

30

UNIDAD 1

Resuelve problemas

51. Una roca de piedra caliza pesa 830 g. La masa de cada molécula de esta piedra es, aproximadamente, $1{,}66 \cdot 10^{-22}$ g. A causa de la erosión, la piedra pierde 10^{13} moléculas cada segundo. Si la erosión se mantiene constante, ¿cuándo desaparecerá la piedra por completo? Da una cota del error absoluto.

52. Durante los años de la crisis financiera, una vivienda, que costaba 250 000 € en 2008, se fue devaluando un 4 % anual durante 5 años. A partir de 2013 subió un 3,5 % hasta que se vendió 2 años después.

a) ¿Cuál fue el precio de venta? Exprésalo en miles de euros y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido.

b) ¿Cuál fue el índice de variación? Di si corresponde a un aumento o a una disminución.

53. Durante 2012, el volumen de agua distribuido a los hogares españoles fue 2 309 hm^3, que supuso el 69,2 % del total. La industria utilizó el 21,3 %, y el resto fue para el consumo municipal.

a) Si la población española era de 46,77 millones, ¿cuál fue el consumo medio por habitante y día?

b) ¿Cuántos litros utilizaron los ayuntamientos?

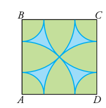
Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en cada medida.

54. Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Expresa el resultado con radicales.

55. Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

56. En un triángulo equilátero de 10 cm de lado, se cortan de las esquinas triángulos equiláteros de lado x y así se obtiene un hexágono. Calcula el valor de x para que el área de ese hexágono sea $10\sqrt{3}$ cm^2.

57. Este es el logotipo de un club deportivo. La figura será reproducida en diferentes tamaños.



a) Halla el radio de cada arco en un cuadrado de lado 2 m.

b) Comprueba que la relación entre los radios de los arcos es $\sqrt{2} - 1$.

c) Halla el perímetro y el área de la parte sombreada en un cuadrado de 2 m de lado.

Reflexiona sobre la teoría

58. Si x es un número del intervalo $[-1, 3)$ e y es un número del intervalo $(0, 4]$, explica en qué intervalo puede estar $x + y$.

59. Razona si son verdaderas o falsas estas igualdades:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a \cdot b}$

b) $\sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

c) $a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{(a \cdot b)^2}$

d) $\sqrt[4]{a^{12} \cdot b^2} = a^3\sqrt{b}$

60. ¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.

a) Todo número decimal es racional.

b) Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.

c) El inverso de un número decimal periódico puede ser un decimal exacto.

d) El número $0{,}83 \cdot 10^9$ no está expresado en notación científica.

e) Todos los números irracionales son reales.

f) Algunos números enteros son irracionales.

g) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales.

h) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

61. Explica si son verdaderas o falsas estas igualdades:

a) $\log (a \cdot b) = \log a \cdot \log b$

b) $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

c) $\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\log a$

d) $\log (a^2 \cdot b) = 2(\log a + \log b)$

62. ¿Cuánto debe valer x para que se verifique esta igualdad?

$$\sqrt{11 \cdot 3^{85} + 4 \cdot 9^{42} + 27^{29}} = 8 \cdot 3^x$$

Utiliza las propiedades de las potencias.

63. Comprueba que no es posible utilizar la calculadora para obtener $5^{129} \cdot 4^{63}$ porque es un número demasiado grande. Utiliza las propiedades de las potencias para expresarlo en notación científica.

31

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

34 a) $1{,}4 \cdot 10^{16}$ b) $1{,}25 \cdot 10^{-2}$ c) $2{,}4 \cdot 10^{12}$ d) $3{,}6 \cdot 10^{-13}$

e) $5 \cdot 10^{12}$ f) $3{,}82 \cdot 10^{-5}$ g) $-4{,}4 \cdot 10^{-8}$ h) $1{,}572 \cdot 10^{10}$

35 a) 6 b) 4 c) –2 d) $\frac{1}{2}$ e) 5

f) –3 g) $\frac{2}{3}$ h) –3 i) –1

36 a) 4,548 b) 5,732 c) –1,748 d) 1,694 e) 1,495 f) –0,402

37 a) 100 b) 5 c) 4 d) 8

38 $\frac{5}{6}$

39 a) 4 b) 3 c) –1 d) 4

40 a) $2\sqrt{3}$ cm b) $20\pi\sqrt{3}$ cm^2

41 $A = 75\pi$ cm^2; $V = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

42 Perímetro de $ABC = 5 + 3\sqrt{5}$ u

Perímetro de $DEF = 6 + 4\sqrt{2}$ u

Perímetro de $GHI = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ u

43 a) $(-3, 3)$ b) $[-4, 6]$ c) $(-7, 1)$

Las desigualdades contrarias son:

a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ b) $(-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$ c) $(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

44 a) $x \in [7, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 5]$ d) $x \in (-\infty, 0]$ d) $x \in (-\infty, +\infty)$

45 $3 + \sqrt{2}$

46 $2\sqrt{5}$ cm

47 a) 2,1 b) 1,7 c) –1,8 d) 0,25

48 6,3

49 a) $1 + \log x + 3 \log y$ b) $3 \log z + \log y - 2 \log x$

c) $2 \log x + \frac{1}{2} \log y + \frac{1}{2} \log z$

50 a) $x^2(x - 3)$ b) $\frac{3(x+1)}{y}$

51 Tardará, aproximadamente, $5 \cdot 10^{11}$ segundos.

Error absoluto $< 5 \cdot 10^{10}$

52 a) Precio de venta = 218 mil euros

Error absoluto < 500 euros. Error relativo < 0,2 %

b) 0,873 → Corresponde a una disminución.

53 a) 0,13 m^3/habitante y día

Error absoluto < 0,005 m^3. Error relativo < 3,8 %

b) $317 \cdot 10^9$ litros

Error absoluto $< 5 \cdot 10^5$ litros. Error relativo < 0,00015 %

54 4 cm

55 $V = 4\sqrt{3}$ cm^3

56 $2\sqrt{5}$ cm

57 a) $R = \sqrt{2}$ m; $r = 2 - \sqrt{2}$ cm b) $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$

c) $P = 4\pi$ m; $A = 8 - 8\pi + 4\pi\sqrt{2}$

58 En $(-1, 7)$.

59 a) F b) F c) V d) V

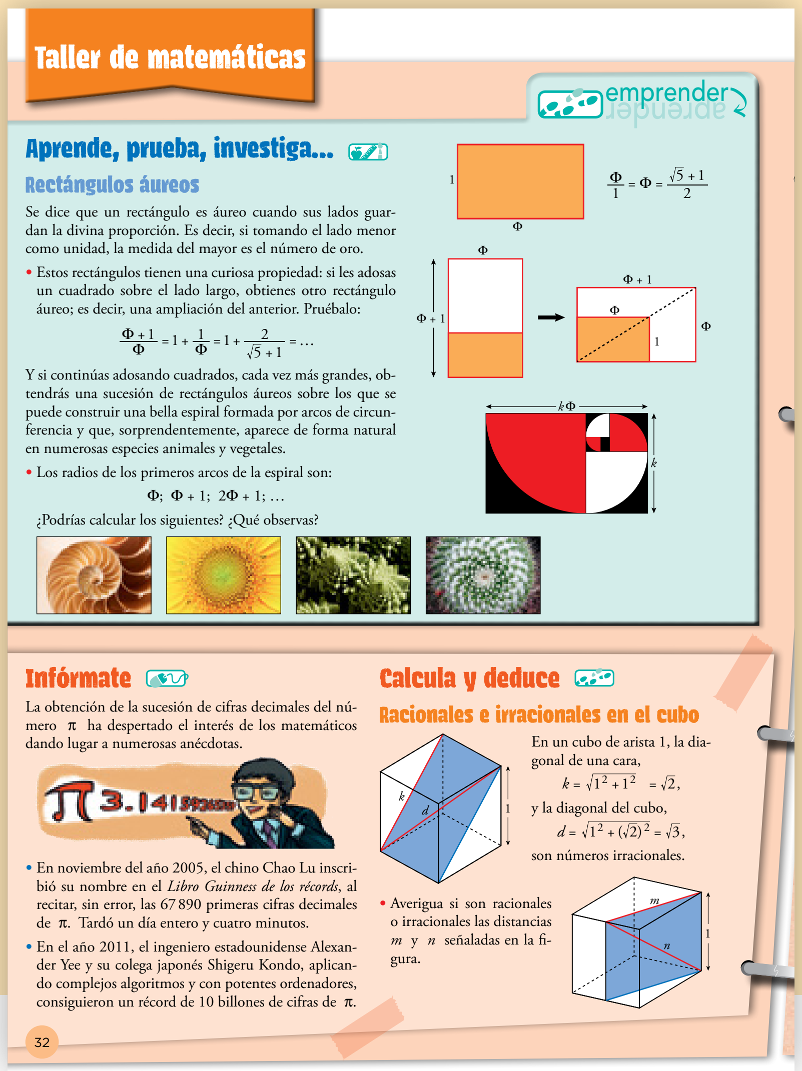
60 a) F b) V c) V d) V

e) V f) F g) V h) V

61 a) F b) V c) V d) F

62 $x = 42$

63 $1{,}25 \cdot 10^{128}$


Taller de matemáticas

emprender

Aprende, prueba, investiga...

Rectángulos áureos

Se dice que un rectángulo es áureo cuando sus lados guardan la divina proporción. Es decir, si tomando el lado menor como unidad, la medida del mayor es el número de oro.

$\frac{\Phi}{1} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

- Estos rectángulos tienen una curiosa propiedad: si les adosas un cuadrado sobre el lado largo, obtienes otro rectángulo áureo; es decir, una ampliación del anterior. Pruébalo:

$$\frac{\Phi+1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \dots$$

Y si continúas adosando cuadrados, cada vez más grandes, obtendrás una sucesión de rectángulos áureos sobre los que se puede construir una bella espiral formada por arcos de circunferencia y que, sorprendentemente, aparece de forma natural en numerosas especies animales y vegetales.

- Los radios de los primeros arcos de la espiral son:

$$\Phi;\ \Phi + 1;\ 2\Phi + 1;\ \dots$$

¿Podrías calcular los siguientes? ¿Qué observas?

Infórmate

La obtención de la sucesión de cifras decimales del número π ha despertado el interés de los matemáticos dando lugar a numerosas anécdotas.

- En noviembre del año 2005, el chino Chao Lu inscribió su nombre en el *Libro Guinness de los récords*, al recitar, sin error, las 67 890 primeras cifras decimales de π. Tardó un día entero y cuatro minutos.
- En el año 2011, el ingeniero estadounidense Alexander Yee y su colega japonés Shigeru Kondo, aplicando complejos algoritmos y con potentes ordenadores, consiguieron un récord de 10 billones de cifras de π.

Calcula y deduce

Racionales e irracionales en el cubo

En un cubo de arista 1, la diagonal de una cara,

$$k = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

y la diagonal del cubo,

$$d = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

son números irracionales.

- Averigua si son racionales o irracionales las distancias m y n señaladas en la figura.

32

Aprende, prueba, investiga…

Rectángulos áureos

El número áureo, ya conocido, se utiliza aquí para estudiar interesantes propiedades de rectángulos cuyas dimensiones están en esta proporción.

Soluciones

- $\frac{\Phi+1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
- La sucesión de coeficientes en la serie de los radios de la espiral coincide con la sucesión de Fibonacci: 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - …

Infórmate

- Conviene insistir en que estas supuestas gestas solo tienen un valor anecdótico, que no suponen nada interesante para las matemáticas.

Tic

Se sugiere la siguiente actividad:

Buscar quién tiene en la actualidad el récord de cifras de π.

Calcula y deduce

Racionales e irracionales en el cubo

Bonito problema en el que, entre una madeja de irracionales, cuando menos se esperaba, se ve surgir un número racional, $\frac{3}{2}$.

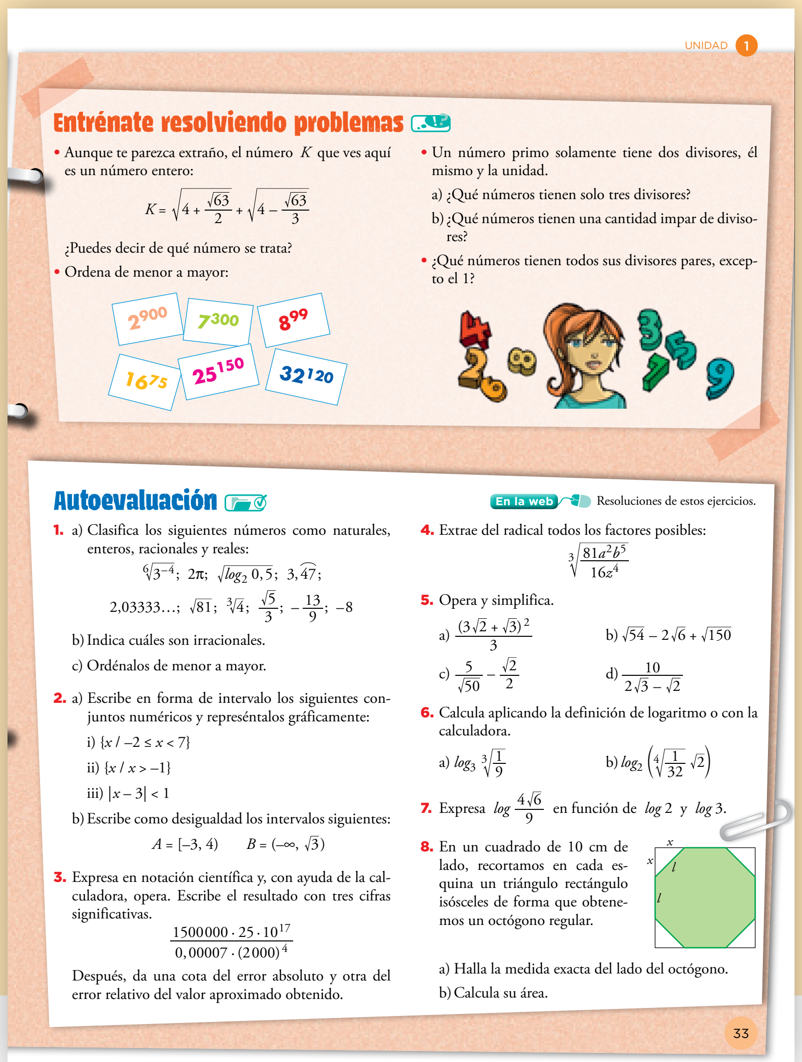
Puede ser un buen pretexto para poder insistir en las relaciones entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soluciones

- $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$ es irracional.

  $n = \frac{3}{2}$ es racional.

ANOTACIONES



Entrénate resolviendo problemas

- Aunque te parezca extraño, el número K que ves aquí es un número entero:

$$K = \sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}} + \sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{3}}$$

¿Puedes decir de qué número se trata?

- Ordena de menor a mayor:

2^{900} 7^{300} 8^{99} 16^{75} 25^{150} 32^{120}

- Un número primo solamente tiene dos divisores, él mismo y la unidad.
  a) ¿Qué números tienen solo tres divisores?
  b) ¿Qué números tienen una cantidad impar de divisores?
- ¿Qué números tienen todos sus divisores pares, excepto el 1?

Autoevaluación

En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1. a) Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales y reales:

$$\sqrt[6]{3^{-4}};\ 2\pi;\ \sqrt{log_2 0,5};\ 3,\widehat{47};$$
$$2,03333\ldots;\ \sqrt{81};\ \sqrt[3]{4};\ \frac{\sqrt{5}}{3};\ -\frac{13}{9};\ -8$$

b) Indica cuáles son irracionales.

c) Ordénalos de menor a mayor.

2. a) Escribe en forma de intervalo los siguientes conjuntos numéricos y represéntalos gráficamente:

i) $\{x \,/\, -2 \le x < 7\}$

ii) $\{x \,/\, x > -1\}$

iii) $|x - 3| < 1$

b) Escribe como desigualdad los intervalos siguientes:

$$A = [-3, 4) \qquad B = (-\infty, \sqrt{3})$$

3. Expresa en notación científica y, con ayuda de la calculadora, opera. Escribe el resultado con tres cifras significativas.

$$\frac{1500000 \cdot 25 \cdot 10^{17}}{0,00007 \cdot (2000)^4}$$

Después, da una cota del error absoluto y otra del error relativo del valor aproximado obtenido.

4. Extrae del radical todos los factores posibles:

$$\sqrt[3]{\frac{81a^2b^5}{16z^4}}$$

5. Opera y simplifica.

a) $\frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{3}$ b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150}$

c) $\frac{5}{\sqrt{50}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

6. Calcula aplicando la definición de logaritmo o con la calculadora.

a) $log_3 \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ b) $log_2 \left(\sqrt[4]{\frac{1}{32}}\,\sqrt{2}\right)$

7. Expresa $log \frac{4\sqrt{6}}{9}$ en función de $log\,2$ y $log\,3$.

8. En un cuadrado de 10 cm de lado, recortamos en cada esquina un triángulo rectángulo isósceles de forma que obtenemos un octógono regular.

a) Halla la medida exacta del lado del octógono.

b) Calcula su área.

Entrénate resolviendo problemas

Soluciones

- $K = \sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}} + \sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{2}} = 3$
- $8^{99} < 16^{75} < 32^{120} < 25^{150} < 7^{300} < 2^{900}$
- a) Los cuadrados de los números primos.

  b) Los cuadrados perfectos.
- Las potencias de base 2.

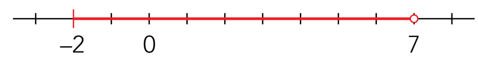
Soluciones de la autoevaluación

1 a) y b)

- $\sqrt[6]{3^{-4}} \Rightarrow$ Real (irracional)
- $2\pi \Rightarrow$ Real (irracional)
- $\sqrt{log_2 0,5} \Rightarrow$ No existe
- $3,\widehat{47} \Rightarrow$ Racional
- $2,0333\ldots \Rightarrow$ Racional
- $\sqrt{81} = 9 \Rightarrow$ Natural
- $\sqrt[3]{4} \Rightarrow$ Real (irracional)
- $\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow$ Real (irracional)
- $-\frac{13}{9} \Rightarrow$ Racional
- $-8 \Rightarrow$ Entero

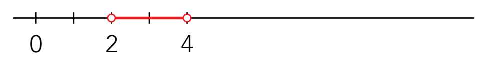
c) $-8 < -\frac{13}{9} < \sqrt[6]{3^{-4}} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \sqrt[3]{4} < 2,0333\ldots < 3,\widehat{47} < 2\pi < \sqrt{81}$

2 a) i) $[-2, 7)$



ii) $(-1, +\infty)$

iii) $(2, 4)$



b) $A = \{x \,/\, -3 \le x < 4\}$

$B = \{x \,/\, x < \sqrt{3}\}$

3 $3,35 \cdot 10^{15}$

E.A. $< 0,005 \cdot 10^{15}$

E.R. $< 0,0015$

4 $\frac{3b}{2z}\sqrt[3]{\frac{3a^2b^2}{2z}}$

5 a) $7 + 2\sqrt{6}$ b) $6\sqrt{6}$

c) 0 d) $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

6 a) $-\frac{2}{3}$ b) $2^{-3/4}$

7 $\frac{5}{2} \cdot log\,2 - \frac{3}{2} \cdot log\,3$

8 a) $l = 10\,(\sqrt{2} - 1)$ cm

b) $A = 200\,(\sqrt{2} - 1)$ cm^2

ANOTACIONES